C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série I, p. 497–500, 2000
Calcul des variations/*Variation Calculus*
(Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*)

Minima absolus pour des énergies ferromagnétiques

Bernard DACOROGNA [a], Irene FONSECA [b]

[a] **Département de mathématiques, EPFL, 1015 Lausanne, Suisse**
Courriel : Bernard.Dacorogna@epfl.ch

[b] **Department of Mathematical Sciences, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, USA**
Courriel : fonseca@andrew.cmu.edu

(Reçu le 16 juin 2000, accepté le 28 juillet 2000)

Résumé. On donne des conditions suffisantes pour l'existence de minima de l'énergie de matériaux ferromagnétiques de grandes dimensions qui ont un champ magnétique induit nul. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Absolute minimizers for some ferromagnetic energies

Abstract. *We study minimizers of the energy for large ferromagnetic bodies, namely*

$$E(m) := \int_\Omega \left[\varphi(m) - \langle h_{\mathrm{e}}; m\rangle\right] \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_m|^2 \,\mathrm{d}x,$$

where the magnetization $m:\Omega\to\mathbb{R}^3$ *is taken with values on the unit sphere* S^2, φ *is the anisotropic energy density,* $h_{\mathrm{e}}\in\mathbb{R}^3$ *is the applied external magnetic field and* $h_m:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *is the induced magnetic field satisfying* $\operatorname{curl} h_m = 0$ *and* $\operatorname{div}(h_m + m\chi_\Omega) = 0$.
Setting $Z := \{\xi\in\mathrm{S}^2 : \psi(\xi) = \min_{\eta\in\mathrm{S}^2}\psi(\eta)\}$ *with* $\psi(\eta) := \varphi(\eta) - \langle h_{\mathrm{e}};\eta\rangle$, *it is shown that if either* 0 *is on a face of* $\partial\operatorname{co} Z$ *or* $0\in\operatorname{int}\operatorname{co} Z$ *(where* $\operatorname{co} Z$ *denotes the convex hull of* Z*) then* E *admits a minimizer* $m\in\mathrm{L}^\infty$ *with* $h_m\equiv 0$. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Nous allons nous intéresser dans cette Note à discuter l'existence de minima d'énergies ferromagnétiques. Nous suivrons en cela la théorie de Landau–Lifschitz [6] (*cf.* aussi Brown [1]). Soit donc un matériau ferromagnétique occupant un domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ (un ouvert borné de frontière lipschitzienne). La *magnétisation* (ou *aimantation*) $m:\Omega\to\mathbb{R}^3$ représente la densité par unité de masse du moment magnétique et elle satisfait la contrainte

$$\left|m(x)\right| = M_T > 0, \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

où T est la température. La condition (1) assure que le matériau est toujours saturé et M_T est appelé la *saturation magnétique*. Nous ferons l'hypothèse, dans notre analyse, que la température est constante et que, sans perte de généralité, $M_T = 1$.

Note présentée par Pierre-Louis LIONS.

S0764-4442(00)01663-3/FLA

Suivant la théorie ferromagnétique classique, les états que l'on observe, lorsque le matériau est soumis à un *champ magnétique extérieur* $h_{\mathrm{e}} \in \mathbb{R}^3$, sont les minima de l'énergie

$$E_\alpha(m) := \frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega |\nabla m|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi(m)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \langle h_{\mathrm{e}}; m\rangle\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_m|^2\,\mathrm{d}x$$

où $\varphi : \mathrm{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\} \to \mathbb{R}$ est la *densité d'énergie anisotrope*, qui est une fonction continue et non négative (d'habitude on fait aussi l'hypothèse, dont nous n'aurons pas besoin dans notre analyse, qu'elle est paire, *cf.* [6]), et $h_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le *champ magnétique induit*, vérifie, au sens des distributions,

$$\begin{cases} \operatorname{rot} h_m = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div}(h_m + m\chi_\Omega) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{2}$$

où χ_Ω est la fonction caractéristique de Ω et α est une constante. Les quatre termes dans E_α sont l'*énergie* respectivement d'*échange*, d'*anisotropie*, d'*interaction* et *magnétostatique*. Un argument d'analyse asymptotique montre (*cf.* De Simone [4]) que pour des corps de grandes dimensions l'énergie d'échange devient négligeable et on est ainsi conduit au problème de minimiser la fonctionnelle

$$E(m) := E_0(m) = \int_\Omega \varphi(m)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \langle h_{\mathrm{e}}; m\rangle\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |h_m|^2\,\mathrm{d}x.$$

L'existence de solutions de E_α quand $\alpha > 0$ rentre dans le cadre classique des méthodes directes du calcul des variations et a été étudiée par Visintin [8]. L'analyse du comportement des solutions de E_α quand $\alpha \to 0$ et leurs relations avec les minima de E se trouvent dans [4].

Avant de procéder plus avant il est bon de reformuler notre problème. À cet effet posons $\psi(\eta) := \varphi(\eta) - \langle h_{\mathrm{e}}; \eta\rangle$ et $Z := \{\xi \in \mathrm{S}^2 : \psi(\xi) = \min_{\eta\in \mathrm{S}^2}\{\psi(\eta)\}\}$.

On montre facilement que le problème de trouver des minima de

$$(\mathcal{P}) : \qquad \inf\{E(m) : m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \text{ satisfaisant (2)}\}$$

est lié au problème de trouver $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ ($m \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$) tel que

$$\begin{cases} m \in Z & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(m\chi_\Omega) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3}$$

Plus précisément : si (3) a des solutions, alors $(\mathcal{P})$ a des solutions qui de plus satisfont $h_m \equiv 0$.

Si $h_{\mathrm{e}} = 0$, James et Kinderlehrer [5] ont résolu le problème dans les cas suivants. Dans le *cas uniaxial* où $Z = \{\pm m_1\}$ (pour un certain $m_1 \in \mathrm{S}^2$) ils ont montré que le système (3) n'admet pas de solutions. Si, en revanche, il existe $m_1, m_2 \in \mathrm{S}^2$ deux vecteurs orthogonaux tels que $\{\pm m_1, \pm m_2\} \subset Z$ (ce qui se produit avec les cristaux ferromagnétiques à symétrie cubique où on a alors $Z = \{\pm m_1, \pm m_2, \pm m_3\}$ avec $\{m_1, m_2, m_3\}$ formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$), alors (3) possède des solutions. L'argument, que nous utiliserons aussi, consiste à construire une solution explicite sur un domaine qui est une sorte de prisme et d'utiliser ensuite le théorème de Vitali pour obtenir le résultat pour un domaine général. La construction explicite est bien connue dans la littérature consacrée au ferromagnétisme. Pour de plus amples développements, concernant notamment l'étude de la relaxation de E, nous référons à Gioia–James, De Simone–Kohn–Müller–Otto ou Tartar (*cf.* [2,4,5] et [7] pour des références bibliographiques précises).

Le but de notre Note est d'étendre l'analyse de James–Kinderlehrer au cas où le champ magnétique extérieur, h_{e}, est non nul. Un autre avantage de notre analyse est que le champ m sera donné comme le rotationnel d'un potentiel vecteur M satisfaisant certaines conditions aux limites (*cf.* remarque 2).

Avant d'énoncer notre résultat principal, il nous faut introduire une terminologie inspirée de l'analyse convexe. Tout d'abord, rappelons que si $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{R}^3$, nous notons par $\operatorname{ev}\{z_1, \ldots, z_N\}$ le sous-espace engendré par ces vecteurs et par « $\dim \operatorname{ev}$ » sa dimension. Soient $Z \subset \mathbb{R}^3$ un compact et $\xi \in \partial \operatorname{co} Z \setminus Z$

(où $\operatorname{co} Z$ désigne l'enveloppe convexe de Z). On dit que ξ est sur une *arête* de $\partial \operatorname{co} Z$ si

$$\left[\xi = \sum_{i=1}^{\ell} t_i z_i,\ z_i \in Z,\ t_i > 0,\ \sum_{i=1}^{\ell} t_i = 1\right] \Longrightarrow \dim \operatorname{ev}\{z_1, \ldots, z_\ell\} \leqslant 1.$$

Si ce n'est pas le cas on dit que ξ est sur une *face* de $\partial \operatorname{co} Z$.

THÉORÈME 1. – *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné de frontière lipschitzienne, $Z \subset \mathrm{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$ un compact et le problème*

$$\begin{cases} m \in Z & \textit{p.p. dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(m\chi_\Omega) = 0 & \textit{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{4}$$

où $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ ($m \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$).
Cas 1 : $0 \notin \operatorname{co} Z$*, alors* (4) *n'admet pas de solutions.*
Cas 2 : $0 \in \partial \operatorname{co} Z$ *et* 0 *est sur une arête de* $\partial \operatorname{co} Z$*, alors* (4) *n'admet pas de solutions.*
Cas 3 : $0 \in \partial \operatorname{co} Z$ *et* 0 *est sur une face de* $\partial \operatorname{co} Z$*, alors* (4) *admet des solutions.*
Cas 4 : $0 \in \operatorname{int} \operatorname{co} Z$*, alors* (4) *admet des solutions. En fait, dans ce cas, il existe même* $M \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ *satisfaisant* $m = \operatorname{rot} M$ *et*

$$\begin{cases} \operatorname{rot} M \in Z & \textit{p.p. dans } \Omega, \\ M = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Remarque 2. – (i) Notre résultat d'existence sera plus précis et nous permettra de trouver (et ceci sans restriction sur la topologie de Ω) $M \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ satisfaisant $m = \operatorname{rot} M$ et

$$\begin{cases} \operatorname{rot} M \in Z & \text{p.p. dans } \Omega, \\ M \parallel \nu & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

où ν désigne une normale extérieure à $\partial\Omega$, et même dans le quatrième cas nous pourrons imposer $M = 0$ sur $\partial\Omega$.

(ii) Il est clair que la condition $\operatorname{div}(m\chi_\Omega) = 0$ au sens des distributions, implique que $\int_\Omega m = 0$. Cette propriété sera utilisée dans la démonstration.

(iii) Quand $h_{\mathrm{e}} = 0$ et φ est paire, alors les cas 2 (avec $Z = \{\pm m_1\}$) et 3 (avec $\{\pm m_1, \pm m_2\} \subset Z$ et m_1, m_2 orthogonaux) se trouvent dans James–Kinderlehrer [5] (*voir* aussi De Simone [4] pour le cas 3). Nos constructions dans ces deux cas s'inspireront des leurs, alors que celle du cas 4 est de nature différente.

Démonstration. – Nous allons seulement esquisser la démonstration et nous référons à notre article [2] pour de plus amples détails.

Cas 1. – Si $0 \notin \operatorname{co} Z$, alors (4) n'admet pas de solutions. Ceci résulte du fait que $m \in Z \Rightarrow 0 = (\operatorname{mes} \Omega)^{-1} \int_\Omega m \in \operatorname{co} Z$.

Cas 2. – Supposons maintenant que $0 \in \partial \operatorname{co} Z$ et que 0 est sur une arête de $\partial \operatorname{co} Z$ et supposons, par l'absurde, qu'il existe $m \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ ($m \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$), solution de (4). On montre tout d'abord facilement qu'il existe un unique $z_0 \in Z$ tel que $-z_0 \in Z$ et donc $0 = \frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{2}(-z_0)$ et

$$m(x) \in \{\pm z_0\}, \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{7}$$

Soit alors $\Omega_\pm := \{x \in \Omega : m(x) = \pm z_0 \text{ p.p.}\}$. Comme $\operatorname{div}(m\chi_\Omega) = 0$ au sens des distributions et (7) a lieu on déduit que, pour tout $\zeta \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} \langle m; \nabla\zeta \rangle \chi_\Omega \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\chi_{\Omega_+} - \chi_{\Omega_-}\right) \langle z_0; \nabla\zeta \rangle \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\chi_{\Omega_+} - \chi_{\Omega_-}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial z_0} \, \mathrm{d}x;$$

ce qui implique que la fonction $g := \chi_{\Omega_+} - \chi_{\Omega_-}$ ne dépend que de variables orthogonales à z_0, plus précisément la fonction $t \to g(x + t z_0)$ est constante. Or ceci est absurde.

Cas 3. – Si $0 \in \partial\,\mathrm{co}\,Z$ et 0 est sur une face de $\partial\,\mathrm{co}\,Z$, alors (4) et même (6) admettent des solutions. On montre tout d'abord que seules deux possibilités (non exclusives) peuvent se présenter, à savoir :

cas 3a : il existe $z_1, z_2, z_3 \in Z$, tous différents et $t_1, t_2, t_3 > 0$ avec $\sum_{i=1}^{3} t_i = 1$, tels que $0 = \sum_{i=1}^{3} t_i z_i$;

cas 3b : il existe $z_1, z_2 \in Z$, $z_1 \neq \pm z_2$, avec $-z_1, -z_2 \in Z$.

Nous discutons seulement le cas 3a, le cas 3b étant traité de manière quasiment identique (les seuls changements concernent les définitions de Δ et f ci dessous ; en effet, par exemple, Δ sera alors le carré unité au lieu d'être un triangle).

Nous allons montrer que pour un Ω_0 bien précis, on peut trouver $M \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega_0; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\, M(x) \in \{z_1, z_2, z_3\} & \text{p.p. dans } \Omega_0, \\ M \parallel \nu & \text{sur } \partial\Omega_0, \end{cases} \tag{8}$$

où ν désigne la normale extérieure unité à $\partial\Omega_0$. Comme le domaine pour lequel nous allons réaliser cette construction est une sorte de prisme (et par conséquent n'a pas de bord C^1) la condition au bord est à intepréter au sens presque partout sur le bord. Le cas général se déduit par une application du théorème de Vitali (*cf.* [5] pour plus de détails).

Comme $0 = \sum_{i=1}^{3} t_i z_i$ on a que, par exemple, $\{z_1, z_2\}$ sont linéairement indépendants. On notera par la suite $\alpha := t_1/t_3$ et $\beta := t_2/t_3$. On pose alors

$$T^3 := z_1 \wedge z_2, \quad T^2 := \frac{z_2 - \langle z_1; z_2\rangle z_1}{1 - (\langle z_1; z_2\rangle)^2}, \quad T^1 := \frac{\langle z_1; z_2\rangle z_2 - z_1}{1 - (\langle z_1; z_2\rangle)^2}.$$

Définissons maintenant le triangle $\Delta := \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < X_1 < \frac{1}{\beta},\ 0 < X_2 < \frac{1}{\alpha},\ \beta X_1 + \alpha X_2 < 1\}$, que l'on écrit comme union disjointe de trois autres triangles

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < X_2 < X_1 < 1/\beta,\ \beta X_1 + (1+\alpha) X_2 < 1\}, \\ \Delta_2 &:= \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < X_1 < X_2 < 1/\alpha,\ (1+\beta) X_1 + \alpha X_2 < 1\}, \\ \Delta_3 &:= \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (1+\beta) X_1 + \alpha X_2,\ \beta X_1 + \alpha X_2 < 1 < \beta X_1 + (1+\alpha) X_2\}. \end{aligned}$$

On pose ensuite $f : \Delta \to \mathbb{R}$,

$$f(X_1, X_2) := X_2 \text{ si } (X_1, X_2) \in \Delta_1 \,; \quad X_1 \text{ si } (X_1, X_2) \in \Delta_2 \,; \quad 1 - (\beta X_1 + \alpha X_2) \text{ si } (X_1, X_2) \in \Delta_3.$$

Noter que $f\,|_{\partial\Delta} = 0$. Finalement, on définit l'ensemble Ω_0 et le potentiel vecteur $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$$\Omega_0 := \{x \in \mathbb{R}^3 : Tx = (\langle T^1; x\rangle, \langle T^2; x\rangle, \langle T^3; x\rangle) \in \Delta \times (0,1)\}, \quad M(x) := f(\langle T^1; x\rangle, \langle T^2; x\rangle) T^3.$$

Il est alors facile de voir que (8) est ainsi établi.

Cas 4. – $0 \in \mathrm{int}\,\mathrm{co}\,Z$. Ce cas suit immédiatement de nos résultats [2] sur les équations de type implicite qui généralisent les travaux récents de Dacorogna–Marcellini dans le cadre variationnel [3]. $\square$

Remerciements. Nous aimerions remercier David Kinderlehrer et Luc Tartar pour des discussions intéressantes. I.F. a été partiellement financée par NSF Grant N° DMS-9731957 ; tandis que B.D. a bénéficié durant sa visite à Carnegie-Mellon du soutien financier du CNA (NSF Grant N° DMS-9803791).

Références bibliographiques

[1] Brown W.F., Micromagnetics, Wiley, New York, 1963.
[2] Dacorogna B., Fonseca I., A-B quasiconvexity and implicit partial differential equations, (en préparation).
[3] Dacorogna B., Marcellini P., Implicit Partial Differential Equations, Birkhäuser, Boston, 1999.
[4] De Simone A., Energy minimizers for large ferromagnetic bodies, Arch. Rational Mech. Anal. 125 (1993) 99–143.
[5] James R.D., Kinderlehrer D., Frustration in ferromagnetic materials, Continuum Mech. Thermodyn. 2 (1990) 215–239.
[6] Landau E.D., Lifschitz E.M., Pitaevskii L.P., Electro Dynamics of Continuous Media, Pergamon, Oxford, 1984.
[7] Pedregal P., Parametrized Measures and Variational Principles, Birkhäuser, Boston, 1997.
[8] Visintin A., On Landau–Lifschitz equations for ferromagnetism, Jap. J. Appl. Math. 2 (1985) 69–84.