C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 271–274, 2000
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Équations de type implicite avec contraintes *

Bernard DACOROGNA [a], Paolo MARCELLINI [b], Chiara TANTERI [a]

[a] **Département de mathématiques, EPFL, 1015 Lausanne, Suisse**
Courriel : Bernard.Dacorogna@epfl.ch, Chiara.Tanteri@epfl.ch

[b] **Dipartimento di Matematica, Università di Firenze, 50134 Firenze, Italie**
Courriel : marcell@udini.math.unifi.it

(Reçu le 8 décembre 1999)

Résumé. On montre que les résultats récents obtenus par Dacorogna–Marcellini se généralisent à des problèmes avec contraintes quasi convexes, en particulier à la contrainte que le déterminant est positif. Ceci nous permet d'éviter dans un exemple important la méthode des ellipses confocales de Murat–Tartar. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Implicit type equations with constraints

Abstract. *We show that the results of Dacorogna–Marcellini can be generalized so as to take into account quasiconvex constraints, in particular the constraint of positivity of the determinant. In an important example of optimal design this approach allows us to avoid the method of confocal ellipses of Murat–Tartar.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soit le problème de Dirichlet avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} F_i(\mathrm{D}u(x)) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega,\ i = 1,\dots,I, \\ G_j(\mathrm{D}u(x)) \leqslant 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega,\ j = 1,\dots,J, \\ u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ et donc $\mathrm{D}u \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (l'ensemble des matrices $m \times n$), $F_i,\ G_j : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R},\ i = 1,\dots,I,\ j = 1,\dots,J$, sont données (par la suite nous ferons l'hypothèse qu'elles sont quasi convexes au sens de Morrey).

Nous adoptons ici les notations et le formalisme introduit dans le livre récent de Dacorogna–Marcellini [3] et nous référons à ce livre pour une bibliographie détaillée et un historique du problème. La nouveauté de cette Note est qu'elle permet de traiter des contraintes de type $G_j(\mathrm{D}u(x)) \leqslant 0$; la plus importante qu'il faut avoir à l'esprit est $\det \mathrm{D}u(x) > 0$, contrainte naturelle en élasticité (ce qui correspond à $m = n,\ J = 1,\ G(\xi) = -\det \xi + \delta$ avec $\delta > 0$). Ce problème a été explicitement formulé dans [3]. Posons alors

$$E = \bigl\{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : F_i(\xi) = 0,\ i = 1,\dots,I,\ G_j(\xi) \leqslant 0,\ j = 1,\dots,J\bigr\}.$$

Note présentée par Haïm BRÉZIS.

S0764-4442(00)00147-6/FLA

Nous allons montrer qu'une condition suffisante pour trouver une solution $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ de (1) est, entre autres, $\mathrm{D}\varphi(x) \in \operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ pour tout $x \in \Omega$, où $\operatorname{int} \operatorname{Rco} E$ dénote l'intérieur de l'enveloppe rang un convexe de E (c'est-à-dire le plus petit ensemble rang un convexe qui contienne E). Pour plus de détails concernant les notations et définitions nous référons à [3].

Avant d'énoncer le résultat principal de cette Note il nous faut introduire la propriété essentielle que nous appelons propriété de relaxation (*cf.* [3]).

DÉFINITION 1 (Relaxation). – Soient $E,\ K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$. On dit que K a la propriété de relaxation par rapport à E si pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour tout polynôme de degré N, u_ξ, avec $\mathrm{D}^N u_\xi(x) = \xi$, satisfaisant $\big(x, \mathrm{D}^{[N-1]}u_\xi(x), \mathrm{D}^N u_\xi(x)\big) \in \operatorname{int} K$, il existe une suite $u_\nu \in \mathrm{C}^N_{\mathrm{piec}}\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m\big)$ satisfaisant aux propriétés suivantes

$$
\begin{aligned}
&u_\nu \in u_\xi + \mathrm{W}_0^{N,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m), \quad u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u_\xi \quad \text{dans } W^{N,\infty},\\
&\big(x, \mathrm{D}^{[N-1]}u_\nu(x), \mathrm{D}^N u_\nu(x)\big) \in E \cup \operatorname{int} K, \quad \text{p.p. dans } \Omega,\\
&\int_\Omega \operatorname{dist}\Big(\big(x, \mathrm{D}^{[N-1]}u_\nu(x), \mathrm{D}^N u_\nu(x)\big);\, E\Big)\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0, \quad \nu \to \infty.
\end{aligned}
$$

On a alors le théorème :

THÉORÈME 2. – *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $F_i,\ G_j : \Omega \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N} \to \mathbb{R}$, $F_i = F_i(x,s,\xi)$, $i = 1,2,\dots,I$, $G_j = G_j(x,s,\xi)$, $j = 1,2,\dots,J$, des fonctions continues dans toutes les variables et quasi convexes dans la variable ξ. Soient $E,\ K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N}$ tels que*

$$
E = \big\{(x,s,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N} : F_i(x,s,\xi) = 0,\ i = 1,2,\dots,I,\ G_j(x,s,\xi) \leqslant 0,\ j = 1\dots,J\big\},
$$
$$
K \subset \big\{(x,s,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_s^{m\times M} \times \mathbb{R}_s^{m\times n^N} : F_i(x,s,\xi) \leqslant 0,\ i = 1,2,\dots,I,\ G(x,s,\xi) \leqslant 0,\ j = 1,\dots,J\big\}.
$$

Supposons que K soit borné uniformément pour $x \in \Omega$ et pour autant que s appartienne à un ensemble borné de $\mathbb{R}_s^{m\times M}$. Supposons en outre que K ait la propriété de relaxation par rapport à E. Soit $\varphi \in \mathrm{C}^N_{\mathrm{piec}}\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m\big)$ satisfaisant $\big(x, \mathrm{D}^{[N-1]}\varphi(x), \mathrm{D}^N\varphi(x)\big) \in E \cup \operatorname{int} K$, p.p. dans Ω ; alors il existe (*un ensemble dense de*) $u \in \varphi + \mathrm{W}_0^{N,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ *tel que*

$$
\begin{cases}
F_i\big(x, \mathrm{D}^{[N-1]}u(x), \mathrm{D}^N u(x)\big) = 0, & i = 1,2,\dots,I, \text{ p.p. } x \in \Omega,\\
G_j\big(x, \mathrm{D}^{[N-1]}u(x), \mathrm{D}^N u(x)\big) \leqslant 0, & j = 1,2,\dots,J, \text{ p.p. } x \in \Omega.
\end{cases}
$$

Un premier corollaire, important en élasticité non linéaire, du théorème 2 est le suivant :

COROLLAIRE 3. – *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, quasi convexe dans la dernière variable et telle que $\big\{\xi \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(x,s,\xi) \leqslant 0,\ \det\xi > 0\big\}$ soit borné dans $\mathbb{R}^{n\times n}$ uniformément pour $x \in \Omega$ et pour autant que s appartienne à un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{piec}}\big(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\big)$ est telle que*

$$
F\big(x, \varphi(x), \mathrm{D}\varphi(x)\big) \leqslant 0 \quad \textit{et} \quad \det \mathrm{D}\varphi(x) > 0, \quad \textit{p.p. } x \in \Omega,
$$

alors il existe (*un ensemble dense de*) $u \in \varphi + \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *tel que*

$$
F\big(x, u(x), \mathrm{D}u(x)\big) = 0 \quad \textit{et} \quad \det \mathrm{D}u(x) > 0, \quad \textit{p.p. } x \in \Omega.
$$

Remarque 4. – (i) Il suffit de choisir $m = n$, $N = 1$, $J = 1$ et $G(\xi) = -\det\xi + \delta$ avec $\delta > 0$, suffisamment petit pour que $\det \mathrm{D}\varphi(x) > \delta$. La propriété de relaxation suit alors facilement comme dans le théorème 6.11 de [3] et une fois qu'on a observé que (*cf.* [5] et la remarque suivante pour plus de détails) si $E=\{(x,s,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n}: F(x,s,\xi)=0,\ \det\xi\geqslant\delta\}$, alors $\operatorname{Rco}E=\{(x,s,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n}: F(x,s,\xi)\leqslant 0,\ \det\xi\geqslant\delta\}$.

(ii) Le théorème se généralise (on considère ici, pour simplifier, que nous n'avons pas de dépendance par rapport aux termes de plus bas ordre) sans autre au cas où on a des fonctions $F,\ G_j:\mathbb{R}_s^{m\times n^N}\to\mathbb{R}$, $j=1,\dots,J$, continues, et respectivement quasi convexe (pour F) et quasiaffines (pour G_j) et telles que $E=\{\xi\in\mathbb{R}_s^{m\times n^N}: F(\xi)=0,\ G_j(\xi)\leqslant 0,\ j=1,\dots,J\}$ est borné dans $\mathbb{R}_s^{m\times n^N}$, pour autant qu'on fasse l'hypothèse qu'il existe une matrice de rang un, η, telle que

$$\langle \mathrm{D}G_j(\xi)\,;\eta\rangle=0,\quad \forall j=1,\dots,J. \tag{2}$$

On a alors que $\operatorname{Rco}E=\{\xi\in\mathbb{R}_s^{m\times n^N}: F(\xi)\leqslant 0,\ G_j(\xi)\leqslant 0,\ j=1,\dots,J\}$. Ceci résulte du fait que comme les G_j sont rang un affines, η est une matrice de rang un et (2) est satisfaite, alors $G_j(\xi+t\eta)=G_j(\xi)+t\langle \mathrm{D}G_j(\xi)\,;\eta\rangle=G_j(\xi)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\forall j=1,\dots,J$. Notons aussi que (2) est automatiquement satisfaite si $J=1$ et que dans le corollaire on a $G_1(\xi)=-\det\xi+\delta$ et donc $\mathrm{D}G_1(\xi)=-\mathrm{adj}_{n-1}\xi$.

On peut donc énoncer le résultat suivant (ici encore on se limite au cas sans dépendance des termes de plus bas ordre) : *si* $\varphi\in\mathrm{C}^N_{\mathrm{piec}}(\overline{\Omega}\,;\mathbb{R}^m)$ *est telle que*

$$F\big(\mathrm{D}^N\varphi(x)\big)\leqslant 0\quad\text{et}\quad G_j\big(\mathrm{D}^N\varphi(x)\big)<0\quad \forall j=1,\dots,J,\ \textit{p.p. } x\in\Omega,$$

alors il existe (*un ensemble dense de*) $u\in\varphi+\mathrm{W}_0^{N,\infty}(\Omega\,;\mathbb{R}^m)$ *tel que*

$$F\big(\mathrm{D}^N u(x)\big)=0\quad\text{et}\quad G_j\big(\mathrm{D}^N u(x)\big)\leqslant 0\quad \forall j=1,\dots,J,\ \textit{p.p. } x\in\Omega.$$

On peut évidemment se poser la question de savoir, lorsqu'on a plus d'une équation, quand la propriété de relaxation a lieu. Le cas le plus important est quand $K=\operatorname{Rco}E$ et que K satisfait la propriété d'approximation (*cf.* théorème 6.14 de [3]).

DÉFINITION 5 (Approximation). – Soient $E\subset K(E)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_s^{m\times M}\times\mathbb{R}_s^{m\times n^N}$. On dit que E et $K(E)$ ont la propriété d'approximation s'il existe une famille d'ensembles fermés E_δ et $K(E_\delta)$, $\delta>0$, tels que : (i) $E_\delta\subset K(E_\delta)\subset\operatorname{int}K(E)$ pour tout $\delta>0$; (ii) pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$ tel que $\operatorname{dist}(\eta\,;E)\leqslant\varepsilon$ pour tout $\eta\in E_\delta$ et $\delta\in[0,\delta_0]$; (iii) si $\eta\in\operatorname{int}K(E)$, alors $\eta\in K(E_\delta)$ pour tout $\delta>0$ suffisamment petit.

THÉORÈME 6. – *Soient $E\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_s^{m\times M}\times\mathbb{R}_s^{m\times n^N}$ un ensemble fermé et borné uniformément pour $x\in\Omega$ et pour autant que s appartienne à un ensemble borné de $\mathbb{R}_s^{m\times M}$. Supposons que $\operatorname{Rco}E$ ait la propriété d'approximation avec $K(E_\delta)=\operatorname{Rco}E_\delta$, alors $\operatorname{Rco}E$ a la propriété de relaxation par rapport à E.*

Comme corollaire nous obtenons immédiatement (*cf.* corollaire 6.18 dans [3], modifié en tenant compte du théorème 2).

COROLLAIRE 7. – *Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $F_i,\ G_j:\mathbb{R}_s^{m\times n^N}\to\mathbb{R},\ i=1,2,\dots,I,\ j=1,\dots,J$, des fonctions quasi convexes. Soit $E=\{\xi\in\mathbb{R}_s^{m\times n^N}: F_i(\xi)=0, i=1,2,\dots,I,\ G_j(\xi)\leqslant 0,\ j=1,\dots,J\}$. Supposons que $\operatorname{Rco}E$ soit compact et que $\operatorname{Rco}E=\operatorname{co}E$. Soit $\varphi\in\mathrm{C}^N_{\mathrm{piec}}(\overline{\Omega}\,;\mathbb{R}^m)$ vérifiant : $\mathrm{D}^N\varphi(x)\in E\cup\operatorname{int}\operatorname{Rco}E$, p.p. $x\in\Omega$, ou bien $\varphi\in\mathrm{W}^{N,\infty}(\Omega\,;\mathbb{R}^m)$ et il existe un compact $L\subset\operatorname{int}\operatorname{Rco}E$ tel que $\mathrm{D}^N\varphi(x)\in L$, p.p. $x\in\Omega$. Alors il existe* (*un ensemble dense de*) *$u\in\varphi+\mathrm{W}_0^{N,\infty}(\Omega\,;\mathbb{R}^m)$ tel que*

$$F_i\big(\mathrm{D}^N u(x)\big)=0,\ i=1,\dots,I,\quad G_j\big(\mathrm{D}^N u(x)\big)\leqslant 0,\quad j=1,\dots,J,\ \textit{p.p. } x\in\Omega.$$

L'idée de la démonstration du théorème 2 est très semblable à celle du théorème 6.3 de [3] et nous en esquissons maintenant les grandes lignes de sa preuve.

Supposons pour simplifier que les fonctions ne dépendent que des termes de plus haut ordre et que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ soit borné. Soit alors V la fermeture dans la norme C^{N-1} de $\{u \in \mathrm{C}^N_{\mathrm{piec}}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m) : u \in \varphi + \mathrm{W}_0^{N,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m),\ \mathrm{D}^N u(x) \in E \cup \operatorname{int} K$, p.p. dans $\Omega\}$. Par hypothèse on a que $\varphi \in V$. De plus V est un espace métrique complet lorsqu'il est muni de la norme C^{N-1}. Par quasi-convexité des fonctions $F_i,\ G_j$ on a

$$V \subset \left\{u \in \varphi + \mathrm{W}_0^{N,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m) : F_i\big(\mathrm{D}^N u(x)\big), G_j\big(\mathrm{D}^N u(x)\big) \leqslant 0,\ i=1,2,\ldots,I,\ j=1,\ldots,J, \text{ p.p. } x \in \Omega\right\}.$$

On définit alors pour $u \in V,\ L(u) = \sum_{i=1}^{I} \int_\Omega F_i\big(\mathrm{D}^N u(x)\big)\,\mathrm{d}x$. Par construction on a immédiatement que si $u \in V$ (ce qui implique en particulier que $G_j\big(\mathrm{D}^N u(x)\big) \leqslant 0$), alors

$$L(u) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{D}^N u(x) \in E, \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{3}$$

Soit enfin $V^k = \left\{u \in V : L(u) > -\frac{1}{k}\right\}$. On montre alors comme dans [3] que V^k est ouvert (ce résultat se déduit de la quasi-convexité des F_i) et dense dans V. La densité résulte de la propriété de relaxation. Le théorème des catégories de Baire implique alors que $\bigcap V^k$ est dense dans V. Le résultat se déduit finalement de (4).

Nous concluons cette Note par un exemple particulièrement significatif. Cet exemple a comme origine un problème de structure optimale qui a été abondamment traité dans la littérature (*cf.* notamment [6,2,3] et [4]). La méthode utilisée jusqu'à maintenant pour étudier ce problème a été la construction des ellipses confocales de Murat–Tartar [7], qui est une construction explicite. Nous montrons qu'on peut obtenir le même résultat en utilisant les théorèmes généraux ci-dessus. L'avantage de cette approche est sa souplesse, son désavantage est évidemment qu'elle n'est pas constructive. Nous référons pour plus de détails à [2,3] et [4] et notamment pour les calculs algébriques à [5]. Le théorème que nous obtenons est une application du corollaire 7.

THÉORÈME 8. – *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $\varphi \in \mathrm{C}^2_{\mathrm{piec}}(\overline{\Omega})$ une fonction satisfaisant*

$$0 \leqslant \Delta\varphi(x) \leqslant 1 \quad \textit{et} \quad \det \mathrm{D}^2\varphi(x) > 0, \quad \textit{p.p. } x \in \Omega,$$

(*ou bien $\varphi \in \mathrm{W}^{2,\infty}(\Omega)$ vérifiant : $\varepsilon \leqslant \Delta\varphi(x) \leqslant 1-\varepsilon$ et $\det \mathrm{D}^2\varphi(x) \geqslant \varepsilon$, p.p. $x \in \Omega$, pour un certain $\varepsilon > 0$*) ; *alors il existe $w \in \varphi + \mathrm{W}_0^{2,\infty}(\Omega)$ tel que*

$$\Delta w(x) \in \{0,1\} \quad \textit{et} \quad \det \mathrm{D}^2 w(x) \geqslant 0, \quad \textit{p.p. } x \in \Omega.$$

* Cette recherche a été financée en partie par le Fonds national suisse (21-50472.97) et le CNR (97.00906.01).

Références bibliographiques

[1] Dacorogna B., Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[2] Dacorogna B., Marcellini P., Existence of minimizers for non-quasiconvex integrals, Arch. Rational Mech. Anal. 131 (1995) 359–399.

[3] Dacorogna B., Marcellini P., Implicit Partial Differential Equations, Birkhäuser, Boston, 1999.

[4] Dacorogna B., Marcellini P., Attainment of minima and implicit partial differential equations, Ric. di Mat. 48 (1999) 311–346.

[5] Dacorogna B., Tanteri C., Implicit partial differential equations and the constraints of nonlinear elasticity, Commun. Partial Differ. Eq. (à paraître).

[6] Kohn R.V., Strang G., Optimal design and relaxation of variational problems I, II, III, Commun. Pure Appl. Math. 39 (1986) 113–137, 139–182, 353–377.

[7] Tartar L., Estimations fines des coefficients homogénéisés, in : Ennio De Giorgi colloquium, P. Krée (Ed.), Research Notes in Math. 125, Pitman, 1985, pp. 168–187.