C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 599-602, 1996
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Sur le problème de Cauchy-Dirichlet pour les systèmes d'équations non linéaires du premier ordre

Bernard DACOROGNA et Paolo MARCELLINI

Département de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1015 Lausanne, Suisse ;
E-mail: dacorog@masg15.epfl.ch

Dipartimento di Matematica "U-Dini", Università di Firenze, Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italie.
E-mail: marcel@udini.unifi.it

Résumé. On établit ici, sous des conditions plus générales que précédemment, l'existence de solutions lipschitziennes pour le problème de Cauchy-Dirichlet pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles, non linéaires, du premier ordre. Nos résultats permettent de traiter des problèmes de valeurs singulières ou de « puits de potentiel ».

Cauchy-Dirichlet problem for first order nonlinear systems

Abstract. *We establish, under more general conditions than previously, the existence of Lipschitz solutions for the Cauchy-Dirichlet problem for first order, nonlinear, partial differential systems. Our results allow to treat singular values or "potential wells" problems.*

Soit le problème de Cauchy-Dirichlet

$$F_1(Du) = F_2(Du) = \ldots = F_N(Du) = 0, \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad u = \varphi, \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, et soient $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de matrice jacobienne $Du \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F_i : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$, et $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ (ou C^1 par morceaux).
Si on pose

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{m \times n} : F_1(\xi) = F_2(\xi) = \ldots = F_N(\xi) = 0\} \tag{2}$$

alors le problème (1) est équivalent à

$$Du(x) \in E, \quad \text{p.p. dans } \Omega, \qquad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Note présentée par Pierre-Louis LIONS.

Dans le cas $N = m = 1$ (*i.e.*, le cas d'une seule équation scalaire), l'équation (1) a été étudiée par de nombreux auteurs et nous renvoyons à Lions [9] pour une plus ample bibliographie. Dans un article précédent ([4], [5]), nous avons introduit une nouvelle méthode pour trouver des solutions $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ de (1) ou de (3). En particulier nous avons montré que dans le cas scalaire (*i.e.*, $m = 1$) (1) ou (3) admettent des solutions si

$$D\varphi(x) \in E \cup \operatorname{int} \operatorname{co} E, \quad x \in \Omega \tag{4}$$

pour autant que E soit fermé. (Par $\operatorname{int}\operatorname{co} E$, nous désignons l'intérieur de l'enveloppe convexe de E).

Nous avons aussi montré que ce type de résultats reste valable dans le cas vectoriel. Nous le généralisons ici : en particulier nous montrons que la condition (4) peut être étendue au cas vectoriel.

Nous introduisons les définitions suivantes. Soit

$$\mathcal{F}_E = \{f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ f|_E = 0\}.$$

On définit alors

$$\operatorname{Pco} E = \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0,\ \forall\, f \in \mathcal{F}_E,\ f \text{ polyconvexe}\}$$
$$\operatorname{Rco} E = \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0,\ \forall\, f \in \mathcal{F}_E,\ f \text{ rang un convexe}\}.$$

Ce sont respectivement l'*enveloppe polyconvexe* et *rang un convexe de* E. Pour les notions de fonctions polyconvexe, quasiconvexe et rang un convexe, nous nous rapportons à [3].

Il est bien connu que

$$E \subset \operatorname{Rco} E \subset \operatorname{Pco} E \subset \operatorname{co} E \tag{5}$$

car f convexe $\Rightarrow$ f polyconvexe $\Rightarrow$ f rang un convexe. Ces enveloppes sont en général toutes différentes.

Avant d'énoncer notre théorème principal, nous allons donner deux exemples.

Exemple 1. – Soit $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, par $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi)$ on désigne les valeurs singulières de la matrice ξ ; en particulier

$$(\lambda_1(\xi))^2 + (\lambda_2(\xi))^2 = |\xi|^2, \qquad \lambda_1(\xi)\,\lambda_2(\xi) = |\det \xi|.$$

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $0 < a_1 \leq a_2$ et $\varphi \in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^2)$ (ou C^1 par morceaux) tels que

$$\lambda_2(D\varphi(x)) < a_2 \quad \text{et} \quad \lambda_1(D\varphi(x))\lambda_2(D\varphi(x)) < a_1 a_2, \qquad x \in \Omega. \tag{6}$$

Alors il existe (un ensemble dense de solutions) $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tel que

$$\lambda_1(Du(x)) = a_1, \qquad \lambda_2(Du(x)) = a_2, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \qquad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Remarque. – Ce résultat a été obtenu dans [4], [5] quand $a_1 = a_2$. Dans le cas $a_1 < a_2$ la condition (6) donnée ici est plus générale que dans [5]. Elle est en un certain sens optimale. Dans le cas présent si

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_1(\xi) = a_1,\ \lambda_2(\xi) = a_2\}$$

alors

$$\operatorname{co} E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq a_2 \ \textit{et}\ \lambda_1(\xi) + \lambda_2(\xi) \leq a_1 + a_2\}$$

$$\operatorname{Pco} E = \operatorname{Rco} E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \lambda_2(\xi) \leq a_2 \text{ et } \lambda_1(\xi)\cdot\lambda_2(\xi) \leq a_1\cdot a_2\}.$$

On voit tout de suite que si $a_1 = a_2$, alors co $E = \mathrm{Pco}\, E = \mathrm{Rco}\, E$. (C'est la raison pour laquelle nous avons pu traiter ce cas dans [5].)

Exemple 2. – Un problème important en élasticité non linéaire est celui des « puits de potentiel ». Nous renvoyons à Ball-James [1] pour plus de détails. Le problème de deux puits de potentiel dans $\mathbb{R}^2$ est le suivant. Étant donné A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ avec $0 < \det A < \det B$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}\,; \mathbb{R}^2)$ (ou C^1 par morceaux), il s'agit de trouver $u \in W^{1,\infty}(\Omega\,; \mathbb{R}^2)$ satisfaisant

$$Du(x) \in E = \mathrm{SO}(2)A \cup \mathrm{SO}(2)B, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \qquad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{8}$$

où SO(2) est l'ensemble des rotations dans $\mathbb{R}^{2\times 2}$. On sait qu'à une rotation et une dilatation près, on peut se restreindre au cas où $A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda\mu > 1$. On suppose de plus que $0 < \lambda < 1 < \mu$. Nous montrons alors qu'il existe (un ensemble dense de solutions) $u \in W^{1,\infty}$ satisfaisant (8), pour autant que

$$\begin{aligned} D\varphi(x) &\in \mathrm{int}\, \mathrm{Pco}\, E = \mathrm{int}\, \mathrm{Rco}\, E \\ &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \xi = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}; \right. \\ &\qquad \left. \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < \frac{\lambda\mu - \det\xi}{\lambda\mu - 1} \text{ et } \sqrt{z_1^2 + z_2^2} < \frac{\det\xi - 1}{\lambda\mu - 1} \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

Le calcul de l'enveloppe rang un convexe a été fait par Sverak [11]. L'existence de solutions de (8) sous l'hypothèse (9) a aussi été obtenue par Müller et Sverak [10] par une approche complètement différente. Leur résultat s'appuie sur la méthode d'intégration convexe introduite par Gromov [8].

Avant d'énoncer notre théorème principal il nous faut introduire la notion suivante.

On dira qu'un ensemble K rang un convexe (*i.e.* $K = \mathrm{Rco}\, K$) satisfait *la propriété du segment* si

$$\begin{cases} \text{pour tout } A,\ B \in K \text{ tel que rang}\,\{A - B\} = 1, \text{ si il existe } \xi \in (A,\, B) \cap \mathrm{int}\, K \\ ((A,\, B) \text{ désigne le segment } A \text{ à } B) \text{ alors il existe } A_\nu,\ B_\nu \in (A,\, B) \cap \mathrm{int}\, K \\ \text{tel que } A_\nu \to A \text{ et } B_\nu \to B. \end{cases} \tag{10}$$

Si K est convexe cette propriété a évidemment toujours lieu. Dans le cas rang un convexe, il ne s'agit pas d'une hypothèse très restrictive (*cf.* exemples).

Notre théorème est alors

THÉORÈME 1. – *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ un compact tel que*

$$\mathrm{Pco}\, E = \mathrm{Rco}\, E, \tag{11}$$

$$\mathrm{Rco}\, E \textit{ a la propriété du segment}, \tag{12}$$

$$\forall\, E_1 \subset E, \quad E_1 \neq E \Rightarrow \mathrm{Pco}\, E_1 \neq \mathrm{Pco}\, E. \tag{13}$$

Soit enfin $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}\,; \mathbb{R}^m)$ (ou C^1 par morceaux) telle que

$$D\varphi(x) \in E \cup \mathrm{int}\, \mathrm{Rco}\, E, \qquad x \in \Omega \tag{14}$$

Il existe alors (un ensemble dense de) $u \in W^{1,\infty}(\Omega\,; \mathbb{R}^m)$ tel que

$$Du(x) \in E \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \qquad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

La preuve du théorème utilise la même idée que [4], [5]. Les deux ingrédients principaux sont le théorème des catégories de Baire (suivant en cela une idée introduite dans le contexte des équations différentielles ordinaires par Cellina [2] et De Blasi-Pianigiani [7]), les théorèmes de semi continuité et de relaxation du calcul des variations. La preuve de ce théorème se trouve dans [6].

Pour conclure il est bon de se demander si le théorème est optimal. Introduisons tout d'abord la notion suivante

$$\overline{\mathrm{Qco}\,E} = \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0,\ \forall\, f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \text{ quasiconvexe et } f|_E = 0\}$$

que nous appellerons (la fermeture de) *l'enveloppe quasiconvexe* de E. (Noter qu'ici f ne prend que des valeurs finies, contrairement au cas polyconvexe et rang un convexe). Comme on a l'implication f polyconvexe $\Rightarrow$ f quasiconvexe $\Rightarrow$ f rang un convexe on a facilement que

$$\overline{\mathrm{Rco}\,E} \subset \overline{\mathrm{Qco}\,E} \subset \overline{\mathrm{Pco}\,E}. \tag{15}$$

La conjecture que nous avons est alors la suivante.

Conjecture. – *Soit $E \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ un fermé. Soit $\varphi \in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^m)$ (ou C^1 par morceaux) telle que*

$$D\varphi(x) \in E \cup \operatorname{int} \overline{\mathrm{Qco}\,E}, \qquad x \in \Omega. \tag{16}$$

Il existe alors (un ensemble dense de) $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ tel que

$$Du(x) \in E \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \qquad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{17}$$

Une telle conjecture nous paraît à l'heure actuelle hors de portée. C'est l'exact analogue de ce qui a été démontré dans le cas scalaire (*cf.* (4)). Notre théorème représente une étape importante vers la démonstration de cette conjecture. Par ailleurs dans presque tous les exemples connus la seule façon de calculer l'enveloppe quasiconvexe est de montrer que les enveloppes polyconvexe et rang un convexe sont égales [et donc égales à l'enveloppe quasiconvexe par (15)]

Remerciements. Nous voudrions remercier le Département de Mathématiques de l'Université de Florence, le CNR (Italie) contrat n° 95.01086.CT01, l'EPFL et le 3e Cycle Romand de Mathématiques, pour avoir financé partiellement, cette recherche.

Note remise le 13 juin 1996, acceptée le 14 juin 1996.

Références bibliographiques

[1] **Ball J. M. et James R. D., 1987.** Fine phase mixtures as minimizers of energy, *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 100, p. 15-52.

[2] **Cellina A., 1980.** On the differential inclusion $x' \in \{-1, 1\}$, *Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Sc. Fis. Mat.*, 69, p. 1-6.

[3] **Dacorogna B., 1989.** *Direct methods in the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin.

[4] **Dacorogna B. et Marcellini P., 1996.** Théorèmes d'existence dans le cas scalaire et vectoriel pour les équations de Hamilton-Jacobi, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322, série I, p. 237-240.

[5] **Dacorogna B. et Marcellini P.** General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations, in the scalar and vectorial cases (à paraître).

[6] **Dacorogna B. et Marcellini P.** Cauchy-Dirichlet problem for first order nonlinear systems (à paraître).

[7] **De Blasi F. S. et Pianigiani G., 1991.** Non convex valued differential inclusions in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 157, p. 469-494.

[8] **Gromov M., 1986.** *Partial Differential relations*, Springer-Verlag, Berlin.

[9] **Lions P.-L., 1982.** *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations,* Research Notes in Math., 69, Pitman, Londres.

[10] **Müller S. et Sverak V.** Attainment results for the two-well problem by convex integration, *preprint.*

[11] **Sverak V., 1993.** On the problem of two wells, in : *Microstructure and phase transitions*, IMA vol. Appl. Math., 54, **Ericksen J.** *et al.* éd., Springer, p. 183-189.