C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I, p. 237-240, 1996
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Théorèmes d'existence dans les cas scalaire et vectoriel pour les équations de Hamilton-Jacobi

Bernard DACOROGNA et Paolo MARCELLINI

B. D. : Département de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Ecublens, 1015 Lausanne, Suisse;

P. M. : Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze, Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italie.

Résumé. On démontre l'existence de solutions lipschitziennes pour le problème de Dirichlet associé à des équations de Hamilton-Jacobi, dans les cas scalaire et vectoriel. Nous établissons que l'ensemble des solutions est un ensemble dense, en utilisant le théorème de Baire et la notion de quasiconvexité au sens de Morrey.

Existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and the vectorial cases

Abstract. *We prove existence of Lipschitz solutions of Dirichlet problem for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and the vectorial cases. We prove that the set of solutions is dense using Baire theorem and the notion of quasiconvexity in Morrey's sense.*

Soit le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} F(Du(x)) = 0, & \text{p.p. } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert (borné), $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ et $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Il est important de souligner que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un vecteur, si $m > 1$ (dans le cas où $m = 1$, on dira que u est scalaire). Rappelons que Du dénote la matrice gradient de u.

Les équations de type Hamilton-Jacobi ont une longue histoire et nous nous référons pour une bibliographie récente à Lions [7] et à Crandall-Ishii-Lions [2].

Précisons tout de suite que les hypothèses faites sur la fonction F permettent de traiter aussi des *systèmes d'équations* aussi bien dans le cas scalaire que vectoriel.

Avant d'énoncer notre théorème, nous mentionnons deux exemples d'applications. Par soucis de simplicité nous les énonçons dans le cas où la condition au bord φ est en outre de classe $C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Note présentée par Pierre-Louis LIONS.

0764-4442/96/03220237 $ 2.00 © Académie des Sciences

Exemple 1 (le cas scalaire et non convexe)

Soit $m = 1$. Le problème (1) admet une solution $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, sous la seule hypothèse

$$D\varphi(x) \in \{F(\xi) = 0\} \cup \operatorname{int} \operatorname{co} \{F(\xi) = 0\}. \tag{2}$$

Par $\operatorname{int} \operatorname{co} \{F(\xi) = 0\}$ on dénote l'intérieur de l'enveloppe convexe des zéros de F. Noter qu'aucune hypothèse de convexité, de coercitivité ou même de continuité n'est faite sur la fonction F. Cette formulation nous permet de traiter, dans le cadre donné par (1), des *systèmes d'équations* du type

$$\begin{cases} F_i(Du) = 0, & i = 1, 2, \ldots, N, \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Il suffit de poser $F = \sum_{i=1}^{N} F_i^2$. En particulier, le problème

$$\begin{cases} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right| = a_i, & i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

a une solution si $a_i > 0$ et $|\partial\varphi / \partial x_i| < a_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

Remarquons, enfin, que si F est *convexe* et satisfait une condition très faible de coercitivité, qui exclut le cas linéaire, alors (2) est équivalente à la condition nécessaire et suffisante usuelle (*cf.* Lions [7])

$$F(D\varphi(x)) \leq 0, \qquad x \in \Omega. \tag{5}$$

Exemple 2 (le cas des valeurs singulières)

Soit $n = m > 1$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (l'ensemble des matrices réelles $n \times n$), on dénote par $\lambda_i(\xi)$ $(0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ les *valeurs singulières* de la matrice ξ, *i.e.* les valeurs propres de $(\xi^t \xi)^{1/2}$.

Soient $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Le problème

$$\begin{cases} \lambda_i(Du) = a_i, & i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

admet une solution $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ si $\lambda_n(D\varphi) < a_1$ dans Ω (cette condition peut être affaiblie, *cf.* [5]). Remarquer que dans le cas $m = n = 2$ le système (6) est équivalent à $|Du|^2 = a_1^2 + a_2^2$ et $|\det Du| = a_1 a_2$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème d'existence général, duquel les deux exemples ci-dessus peuvent être déduits.

THÉORÈME. – *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ et $f : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ satisfaisant les hypothèses suivantes*

(7) *f est quasiconvexe*

(8) *Il existe un ensemble convexe et compact K tel que*

$$K \subset \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) \leq 0\}.$$

(9) $Qf^-(\xi) = 0$ *pour tout* $\xi \in \operatorname{int} K$, *où* $f^- = -f$ *sur* K, $+\infty$ *ailleurs.*
(10) $D\varphi(x) \in L \subset \operatorname{int} K$, *p.p.* $x \in \Omega$ *où* L *est compact.*
Alors il existe $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\, \mathbb{R}^m)$ *satisfaisant* $Du(x) \in K$ *et*

$$\begin{cases} f(Du) = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Si de plus $\varphi \in C^1(\Omega;\, \mathbb{R}^m)$ *alors* (10) *peut être remplacée par*

$$D\varphi(x) \in \operatorname{int} K \cup \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : f(\xi) = 0\}. \tag{12}$$

Remarques. – (i) Ce théorème est démontré dans [5]. De même il est démontré comment les deux exemples précédents s'insèrent dans ce cadre. Enfin il est bon de noter que si $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque telle qu'il existe f satisfaisant (7) à (10) et

$$\{\xi \in K : f(\xi) = 0\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^{m\times n} : F(\xi) = 0\}$$

alors (1) admet une solution.

(ii) Nous rappelons que par Qf on dénote l'enveloppe quasiconvexe de f. Dans le cas vectoriel la vérification de (9) peut s'avérer difficile. Toutefois une condition suffisante, et de loin plus facile à vérifier, est

$$Rf^-(\xi) = 0, \qquad \xi \in \operatorname{int} K$$

où Rf^- désigne l'enveloppe rang un convexe de f^- (*cf.* pour plus de détails [4] et [5]).

Nous terminons cette Note en donnant une idée de la démonstration. Les points principaux sont :

(i) *La méthode des catégories de Baire* introduite par Cellina [1] et développée par De Blasi-Pianigiani [6] pour traiter le problème de Cauchy de certaines équations différentielles ordinaires.

(ii) La notion de *quasiconvexité* introduite par Morrey [8] (*cf.* aussi [4]) qui est l'extension naturelle de la notion de convexité aux problèmes vectoriels.

L'idée est donc la suivante. Soit $k \in \mathbb{N}$ et définissons

$$V = \{u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\, \mathbb{R}^m) : f(Du) \leq 0 \,\text{p.p. dans}\, \Omega\}$$
$$V_k = \left\{u \in V : \int_\Omega f(Du(x))dx > -\frac{1}{k}\right\}.$$

La quasiconvexité de f (pour cette étape la convexité de f serait suffisante) et une borne uniforme sur les gradients assurent, facilement, que V est un espace métrique complet par rapport à la norme L^∞ et que V_k est ouvert dans V. La partie la plus difficile est de montrer que V_k est dense dans V et ceci provient de l'hypothèse (9). Le théorème de Baire implique alors que

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k &= \left\{u \in V : \int_\Omega f(Du(x))dx \geq 0\right\} \\ &= \{u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega;\, \mathbb{R}^m) : f(Du) = 0 \,\text{p.p. dans}\, \Omega\} \end{aligned}$$

est *dense* dans V. Par conséquent l'ensemble des solutions de (11) est dense dans V.

Ce résultat de densité contraste évidemment avec l'unicité des *solutions de viscosité* (notion introduite dans ce contexte par Crandall-Lions [3] et Lions [7]) qui est établie pour les équations de type Hamilton-Jacobi, *cf.* Lions [7]. Toutefois il paraît difficile d'étendre cette notion aux problèmes vectoriels, car, contrairement au cas scalaire, il n'existe pas d'ordre naturel sur l'ensemble des valeurs de la fonction u. En particulier la notion de *solution maximale* n'est pas bien définie. Notre approche produit un ensemble dense de solutions; on pourrait alors imaginer un critère de sélection de ces solutions. Évidemment dans le cas scalaire le meilleur critère est, usuellement, celui de viscosité.

Note remise le 4 décembre 1995, acceptée le 14 décembre 1995.

Références bibliographiques

[1] **Cellina A., 1980.** On the differential inclusion $x' \in [-1, 1]$, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Sc. Fis. Mat.*, 69, p. 1-6.

[2] **Crandall M. G., Ishii H. et Lions P. L., 1992.** User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27, p. 1-67.

[3] **Crandall M. G. et Lions P. L., 1983.** Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277, p. 1-42.

[4] **Dacorogna B., 1989.** *Direct methods in the calculus of variations*, Applied Math. Sciences, 78, Springer-Verlag, Berlin.

[5] **Dacorogna B. et Marcellini P.** General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial cases (en préparation).

[6] **De Blasi F. S. et Pianigiani G., 1991.** Non convex valued differential inclusions in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 157, p. 469-494.

[7] **Lions P. L., 1982.** *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Math., 69, Pitman, London.

[8] **Morrey C. B., 1966.** *Multiple integrals in the calculus of variations*, Grundlehren Math. Wiss., 130, Springer-Verlag, Berlin.