QUELQUES RESULTATS NOUVEAUX D'EXISTENCE ET DE SEMI CONTINUITE DANS LE CALCUL DES VARIATIONS

par

Bernard DACOROGNA*

§1. POLYCONVEXITE, QUASICONVEXITE ET RANG 1 CONVEXITE

Soit

$$I(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))dx \tag{1.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, $u: \Omega \to \mathbb{R}^m$ et donc $\nabla u \in \mathbb{R}^{nm}$ et $f: \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ est continue.

On sait que la notion importante, lorsqu'on cherche à minimiser I, est la <u>semi continuité inférieure faible</u> (par suites) de I, plus précisément

$$\liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geq I(u) \tag{1.2}$$

pour toute suite $u_\nu \rightharpoonup u$ $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ ($W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ dénotant l'espace de Sobolev des fonctions vectorielles $u \in (L^p(\Omega))^m$ avec $\nabla u \in (L^p(\Omega))^{nm}$ et $\rightharpoonup$ dénotant la convergence faible). La question importante est alors de savoir quelles conditions on doit imposer à f pour avoir (1.2). Le résultat suivant est essentiellement dû à Morrey [1],[2] et mis en forme par Ball [1] (pour plus de détails c.f. Dacorogna [1]).

<u>Théorème 1</u> (Morrey)

i) I est semi continue inférieurement par rapport à la convergence faible * dans $W^{1,\infty}$ si et seulement si f est <u>quasiconvexe</u>, i.e.

$$\int_\Omega f(A+\nabla\phi(x))dx \geq f(A)\,\mathrm{mes}\,\Omega \tag{1.3}$$

pour tous $A \in \mathbb{R}^{nm}$ et $\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

ii) Condition nécessaire

Si f est quasiconvexe alors elle est rang 1 convexe, i.e.

$$f(tA+(1-t)B) \leqq tf(A) + (1-t)f(B) \tag{1.4}$$

pour tous $t \in [0,1]$, $A,B \in \mathbb{R}^{nm}$ avec rang $\{A-B\} \leqq 1$.

Si $f \in C^2(\mathbb{R}^{nm})$ alors (1.4) est équivalente à la condition de Legendre-Hadamard (ou ellipticité)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial^2 f(A)}{\partial A_{i\alpha}\,\partial A_{j\beta}} \lambda_i\lambda_j\mu_\alpha\mu_\beta \geqq 0 \tag{1.5}$$

pour tous $A \in \mathbb{R}^{nm}$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$.

iii) Condition suffisante

Soit $A \in \mathbb{R}^{nm}$, on dénote par $T\colon \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$

$$T(A) = (A, \mathrm{adj}_2 A, \ldots, \mathrm{adj}_{n\wedge m} A) \tag{1.6}$$

où $\mathrm{adj}_s A$ est la matrice de tous les mineurs $s\times s$ de A et $n\wedge m = \min\{n,m\}$. (Par exemple si $n=m=2$, $\tau(n,m) = 5$ et $T(A) = (A, \det A)$. Si $n=m=3$, $\tau(n,m) = 19$ et $T(A) = (A, \mathrm{adj}_2 A, \det A) \in \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}$). Si f est polyconvexe, i.e., il existe $g\colon \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to \mathbb{R}$ convexe telle que

$$f(A) = g(T(A)) \tag{1.7}$$

alors f est quasiconvexe.

Remarques:

i) En résumé on a

$$\begin{array}{ccccccc} f \text{ convexe} & \Rightarrow & f \text{ polyconvexe} & \Rightarrow & f \text{ quasiconvexe} & \Rightarrow & f \text{ rang 1 convexe} \\ & & & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ & & & & \text{I est faiblement s.c.i.} & & \text{Les équations d'Euler associées sont elliptiques.} \end{array}$$

ii) Si $m = 1$ (ou si $n = 1$) alors, évidemment, toutes ces notions sont équivalentes et on parle du <u>cas scalaire</u>, si $m,n > 1$ on parle du <u>cas vectoriel</u>.

Examinons maintenant des exemples.

<u>Exemple 1 (Le cas quadratique)</u>

Ce cas est le plus important car les équations d'Euler sont alors linéaires. Soient M une matrice symétrique $nm \times nm$ et

$$f(A) = \langle MA;A\rangle \tag{1.8}$$

ou $\langle .,.\rangle$ dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{nm}$. On a alors

i) (Van Hove) f quasiconvexe $\Longleftrightarrow$ f rang 1 convexe

ii) (Albert, Reid, Mac Shane, Hestenes, Terpstra, Marcellini, D. Serre) si $m = 2$ ou si $n = 2$

f polyconvexe $\Longleftrightarrow$ f quasiconvexe $\Longleftrightarrow$ f rang 1 convexe

iii) (Terpstra, D. Serre) si $n,m \geqq 3$

f quasiconvexe $\not\Longrightarrow$ f polyconvexe.

Pour plus de développements on pourra se référer à Dacorogna [1].

<u>Exemple 2 (Surfaces minimales sous forme paramétrée)</u>:

Soit $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ (i.e. $m = n+1$). On note par $\operatorname{adj}_n \nabla u \in \mathbb{R}^{n+1}$ la normale à la surface paramétrée par u. Soit $g: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(A) = g(\operatorname{adj}_n A) \tag{1.9}$$

pour $A \in \mathbb{R}^{n(n+1)}$. On a alors

f polyconvexe $\Longleftrightarrow$ f quasiconvexe $\Longleftrightarrow$ f rang 1 convexe $\Longleftrightarrow$ g convexe.

Ce résultat est dû à Morrey [1],[2], c.f. aussi Dacorogna [1].

Exemple 3

Soient $m = n$ et

$$f(A) = g(\det A). \tag{1.10}$$

On a alors

f polyconvexe <=> f quasiconvexe <=> f rang 1 convexe <=> g convexe.

Ce résultat a été obtenu par Dacorogna [1]. On note toutefois que si g est convexe, on a bien la semi continuité de I, mais ceci n'est pas suffisant pour établir l'existence d'un minimum de

$$\text{(P)} \qquad \inf\{I(u) = \int_\Omega g(\det\nabla u(x))dx : u = u_o \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Pour trouver une solution de (P), on peut utiliser le résultat ci-dessous. Tout d'abord introduisons les notations suivantes:

Notations:

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soient $k \geqq 1$ un entier et $o < \alpha < 1$, on note par $\text{Diff}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ l'ensemble des difféomorphismes u de $\bar{\Omega}$ sur $\bar{\Omega}$ tels que $u, u^{-1} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ (l'espace des fonctions Hölderiennes).

Théorème 2 (Dacorogna-Moser [1])

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont le bord $\partial\Omega$ est de classe C^∞. Soient $k \geqq o$ un entier, $o < \alpha < 1$, $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec $f > o$ dans $\bar{\Omega}$ et $\int_\Omega f(x)dx = \text{mes}\,\Omega$ alors il existe $u \in \text{Diff}^{k+1,\alpha}(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$\begin{cases} \det \nabla u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = x & x \in \partial\Omega . \end{cases} \tag{1.11}$$

A l'aide du Théorème 2 et de l'inégalité de Jensen (car g est convexe) il est très facile de trouver un minimum de (P) si $u_o \in \text{Diff}^{k+1,\alpha}(\bar{\Omega})$ (c.f. Dacorogna [1],[2] pour plus de détails).

Exemple 4 (Dacorogna-Marcellini [1], Alibert-Dacorogna [1]).

Soient $m = n = 2$, $\gamma \geqq 0$ et

$$f_\gamma(A) = |A|^2(|A|^2 - 2\gamma \det A)$$

où $|A|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}^2$. On a alors

$$
\begin{aligned}
&f_\gamma \text{ convexe} && \iff && \gamma \leqq \frac{2\sqrt{2}}{3}\\
&f_\gamma \text{ polyconvexe} && \iff && \gamma \leqq 1\\
&f_\gamma \text{ quasiconvexe} && \iff && \gamma \leqq \bar{\gamma} \text{ (pour un certain } \bar{\gamma} > 1)\\
&f_\gamma \text{ rang 1 convexe} && \iff && \gamma \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}
$$

On voit donc que si $1 < \gamma \leqq \bar{\gamma}$ alors f_γ est quasiconvexe mais non polyconvexe. La question ouverte est de savoir si $\bar{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $\bar{\gamma} < \frac{2}{\sqrt{3}}$. Dans le deuxième cas ceci répondrait (par la négative) au problème ouvert depuis longtemps à savoir si les notions de rang 1 convexité et quasiconvexité sont équivalentes (c.f. Ball [2] ou Dacorogna [1] pour l'historique et l'importance de ce problème). Des calculs numériques (c.f. Dacorogna-Douchet-Gangbo-Rappaz [1]) semblent indiquer que $\bar{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

§2. CONTINUITE ET SEMI CONTINUITE

Commençons par des résultats de continuité faible. On se restreint ici au cas $m = n$ par souci de simplicité. On sait depuis les résultats de Reshetnyak [1], Ball [1], qui suivaient ceux de Morrey [1] que si

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n) \tag{2.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné alors

$$\det \nabla u_\nu \rightharpoonup \det \nabla u \quad L^{p/n}(\Omega) \tag{2.2}$$

pour autant que $p > n$. Le résultat restant vrai si $p = n$ et si on remplace la convergence faible dans (2.2) par la convergence au sens des distributions. La question est alors de savoir ce qui arrive si $p < n$.

On voit tout de suite, grâce à l'inégalité de Hölder, que si $p < n$ alors en général $\det \nabla u \notin L^1$ et il se pose donc tout de suite la question du sens qu'il faut donner à $\det \nabla u$ si $u \in W^{1,p}$ avec $p < n$. Pour éviter toute ambiguité nous allons nous restreindre au cas où u_ν et $u \in W^{1,n}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ mais la convergence (2.1) a lieu pour $p < n$. Ball [1] a alors établi que

$$\det \nabla u_\nu \rightharpoonup \det \nabla u \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.3}$$

(i.e. au sens des distributions) pour autant que $p > \frac{n^2}{n+1}$.

Remarques:

i) Noter qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse $u_\nu, u \in W^{1,n}$, sans autres. En effet si Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et si

$$u_\nu(x) = \frac{x}{|x|+\nu^{-1}} \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$$

alors

$$u_\nu \rightharpoonup u(x) = \frac{x}{|x|} \; W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$$

pour tout $p < n$ (noter que $u \notin W^{1,n}$). Par ailleurs il est facile de voir que

$$\det \nabla u_\nu \rightharpoonup \omega_n \delta_o \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

où ω_n est la mesure de la boule unité (π si $n = 2$, $\frac{4}{3}\pi$ si $n = 3\ldots$) et δ_o est la masse de Dirac centrée en o. Noter que $\det \nabla u = o$ p.p. dans Ω.

ii) Dans Dacorogna-Murat [1], on montre qu'en fait on ne peut pas descendre au dessous de $\frac{n^2}{n+1}$. Plus présisément on a qu'il existe $u_\nu, u \in W^{1,n}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ avec $u_\nu \rightharpoonup u \; W^{1,p}$ tels que

Cas 1 Si $p = \frac{n^2}{n+1}$, il existe $o \neq \mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec

$$\det \nabla u_\nu \rightharpoonup \det \nabla u + \mu \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Cas 2 Si $1 \leq p < \frac{n^2}{n+1}$, il existe $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega \det \nabla u_\nu(x)\phi(x)dx = \infty\,.$$

Dans Dacorogna-Murat [1] on donne aussi des résultats plus précis dans le cas où $u(x) = \text{grad}\, v(x)$, $v: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ainsi que dans le cas de fonctions radiales.

Tournons-nous enfin vers des résultats de semi continuité inférieure faible. On a vu dans le Théorème 1 que Morrey a montré que la quasiconxité de f est nécessaire et suffisante pour s'assurer de la semi continuité (i.e. (1.2)) par rapport à la convergence faible *. Plus important est d'établir la semi continuité par rapport à la convergence faible dans $W^{1,p}$. De tels résultats pour des f quasiconvexes ont été obtenus par Morrey, Meyers, Acerbi-Fusco, Marcellini [1], (c.f. Dacorogna [1] pour plus de détails). Puis plus récemment par Giaquinta-Modica-Soucek [1] et Müller [1]. Nous présentons ici un théorème dû à Dacorogna-Marcellini [2] qui s'applique à des foncitons polyconvexes (c.f. aussi Carbone-De Arcangelis [1]). Nous allons l'énoncer uniquement dans un cas particulier.

<u>Théorème 3</u>

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $g \geqq 0$ et

$$I(u) = \int_\Omega g(\det \nabla u(x))dx\,. \tag{2.1}$$

Si $u_\nu, u \in W^{1,n}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ et $u_\nu \rightharpoonup u$ $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ avec $p > n-1$ alors

$$\liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geqq I(u)\,. \tag{2.2}$$

<u>Remarques</u>:

i) Dans le cas $n = 2$, le résultat reste vrai même si $p = 1 = n-1$.

ii) Le problème de savoir si (2.2) a lieu si $1 \leqq p < n-1$ $(n \geqq 3)$ est ouvert.

iii) Le théorème est aussi vrai pour des fonctions polyconvexes générales.

iv) Le résultat est faux, si on supprime la condition $g \geqq 0$. En effet si $g(\det \nabla u) = \det \nabla u$, alors Tartar, Ball-Murat [1] montrent que (2.2) n'a pas lieu (c.f. aussi Dacorogna [1] ou Dacorogna-Marcellini [1]).

v) De même le résultat est faux si on supprime l'hypothèse $u_\nu, u \in W^{1,n}$, c.f. Ball-Murat [1] (noter toutefois qu'alors l'intégrale (2.1) n'est plus bien définie).

vi) Par ailleurs on doit insister sur le fait que le résultat est à première vue surprenant et semble contredire celui de Dacorogna-Murat [1] cité plus haut. En effet si $n-1 < p < \frac{n^2}{n+1}$ on a $\det \nabla u_\nu \not\rightharpoonup \det \nabla u$, mais on a quand même semi continuité!

vii) Enfin lorsqu'on veut appliquer le théorème ci-dessus à un problème de minimisation l'hypothèse u_ν et $u \in W^{1,n}$ n'est pas tout à fait adaptée. Toutefois il nous permet de définir une fonctionnelle relaxée même si $u \notin W^{1,n}$, il faut alors écrire

$$\bar{I}(u) = \inf_{\{u_\nu\} \subset W^{1,n}} \{ \liminf_{u_\nu \rightharpoonup u \, W^{1,p}} I(u_\nu)\}.$$

Théorème 3 assurant que si $u \in W^{1,n}$ alors $\bar{I}(u) = I(u)$.

<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>

- J.J. Alibert-B. Dacorogna [1]: An example of a quasiconvex not polyconvex function in dimension two; à paraître dans Arch. Rational Mech. Anal.

- J.M. Ball [1]: Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity; Arch. Rational Mech. Anal. 64 (1977), 337-403.

- J.M. Ball [2]: Does rank one convexity imply quasiconvexity?; dans "Metastability and incompletely posed problems", édité par S. Antman et al., Springer-Verlag (1987), 17-32.

- J.M. Ball et F. Murat [1]: $W^{1,p}$ quasiconvexity and variational problems for multiple integrals; J. Funct. Anal. 58 (1984), 225-253.

- L. Carbone et R. De Arcangelis [1]: Further results on Γ-convergence; Ricerche di Matematica (1990), 99-129.

- B. Dacorogna [1]: "Direct methods in the calculus of variations", Springer-Verlag, Berlin (1989).

- B. Dacorogna [2]: Existence and regularity of diffeomorphisms with prescribed Jacobian, dans "Progress in PDEs: The Metz surveys" éd. par M. Chipot et J. Saint Jean Paulin, Longman (1991).

- B. Dacorogna-J. Douchet-W. Gangbo-J. Rappaz [1]: Some examples of rank one convex functions in dimension two; Proc. Roy. Soc. Edimburgh 114A (1990), 135-150.

- B. Dacorogna-P. Marcellini [1]: A Counterexample in the vectorial calculus of variations; dans "Material instabilities in continuum mechanics", édité par J.M. Ball, Oxford Publications (1988), 77-83.

- B. Dacorogna-P. Marcellini [2]: Semicontinuité pour des intégrandes polyconvexes sans continuité des déterminants; Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 311, série I (1990), 393-396.

- B. Dacorogna-J. Moser [1]: On a partial différential equation involving the Jacobian determinant; Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, Vol. 7 (1990), 1-26.

- B. Dacorogna-F. Murat [1]: On the optimality of certain Sobolev exponents for the weak continuity of determinants; à paraître dans J. Funct. Anal.

- G. Giaquinta-G. Modica-J. Soucek [1]: Cartesian currents, weak diffeomorphisms and existence theorems in nonlinear elasticity; Arch. Rational Mech. Anal. 106 (1989), 97-159 et 109 (1990), 385-392.

- P. Marcellini [1]: On the definition and the lower semicontinuity of certain quasiconvex integrals; Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, Vol.3 (1986), 391-409.

- C.B. Morrey [1]: Quasiconvexity and the semicontinuity of multiple integrals; Pacific J. Math. 2 (1952), 25-53.

- C.B. Morrey [2]: "Multiple integrals in the calculus of variations", Springer-Verlag, Berlin (1966).

- S. Müller [1]: Weak continuity of determinants and nonlinear elasticity; Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 307, série I (1988), 501-506.

- Y. Reshetnyak [1]: Stability theorems for mappings with bounded excursions; Sib. Math. J. 9 (1968), 499-512.

*ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE
Département de Mathématiques
CH 1015 LAUSANNE (Switzerland)