C. R. Acad. Sci. Paris, t. 311, Série I, p. 393-396, 1990

Calcul des variations/*Calculus of Variations*

Semicontinuité pour des intégrandes polyconvexes sans continuité des déterminants

Bernard DACOROGNA et Paolo MARCELLINI

Résumé – Pour montrer la semicontinuité d'intégrales multiples du calcul des variations, il est habituel de s'assurer tout d'abord de la continuité faible de tous les mineurs de la matrice gradient. Nous montrons que dans certains cas on peut obtenir cette semicontinuité, bien que les mineurs ne convergent pas.

Semicontinuity for polyconvex integrands without continuity of determinants

Abstract – *To show the weak lower semicontinuity of multiple integrals of the calculus of variations, one usually proves the weak continuity of all the minors of the gradient matrix. We show that in some cases one can obtain the weak lower semicontinuity, although the minors are not weakly continuous.*

Soit

$$I(u)=\int_{\Omega} g(M(\nabla u(x)))\,dx \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, u: $\Omega \to \mathbb{R}^n$ et

$$M(\nabla u)=(\nabla u, \operatorname{adj}_2 \nabla u, \ldots, \operatorname{adj}_{n-1} \nabla u, \det \nabla u) \in \mathbb{R}^\tau$$

où $\tau=\sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s}^2$ (si $n=2$ alors $\tau=5$) et $\operatorname{adj}_s \nabla u$ dénote la matrice de tous les mineurs $s \times s$ de ∇u.

Depuis les travaux de Morrey [6], Reshetnyak [8] et surtout Ball [1], on sait que si g est convexe alors I est faiblement semicontinue inférieurement (par suites) dans $W^{1,p}$ pour autant qu'on puisse s'assurer de la continuité faible des déterminants, *i. e.*

$$u_\nu \overset{W^{1,p}}{\rightharpoonup} u \quad \Rightarrow \quad M(\nabla u_\nu) \overset{L^1}{\rightharpoonup} M(\nabla u). \tag{2}$$

Reshetnyak [8] et Ball [1] ont démontré entre autre que (2) a lieu si $p>n$. Müller [7] (*cf.* aussi Giaquinta-Modica-Soucek [4]) a amélioré ce résultat.

Notre but est de montrer que la semicontinuité de $I(u)$ dans $W^{1,p}$ peut être démontrée dans certains cas, bien que (2) n'ait pas lieu. Plus précisément nous démontrerons.

THÉORÈME. – *Soit $I(u)$ définie ci-dessus et soit $g: \mathbb{R}^\tau \to \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$g \text{ convexe et } g \geqq 0, \tag{3}$$

alors

$$I(u) \leqq \liminf_{\nu \to \infty} I(u_\nu) \tag{4}$$

si u_ν, $u \in W^{1,n}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ et $u_\nu \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}$, $p>n-1$. De plus si $n=2$ alors le résultat a lieu même si $p=1$.

Remarques. – (i) Observons tout d'abord qu'il existe u_ν, $u \in W^{1,n}$, $u_\nu \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}$ avec $n-1<p\leqq n$ (*cf.* Tartar, Ball-Murat [2], Dacorogna-Murat [3]) tel que $M(\nabla u_\nu)$ ne

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/90/03110393 $ 2.00 © Académie des Sciences

converge pas vers $M(\nabla u)$ dans L^1 faible. Par exemple si $n=2$, $\Omega=(0,1)^2$, $1<p\leqq 2$ et

$$u_\nu=\nu^{(1/p)-1}(1-y)^\nu(\sin\nu x, \cos\nu x) \overset{W^{1,p}}{\rightharpoonup} u=(0,0).$$

Dans ce cas on a que $\det\nabla u_\nu=-\nu^{2/p}(1-y)^{2\nu-1}$ n'est pas borné dans L^1 si $p<2$ et de toute façon ne converge pas dans L^1 faible vers $\det\nabla u=0$ même si $p=2$.

(ii) Il faut aussi noter que l'hypothèse u_ν, $u\in W^{1,n}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ est importante. Dans la perspective d'une application directe de (4) à des problèmes de minimisation, cette hypothèse est trop restrictive. Toutefois elle peut être utile (*cf.* Marcellini [5]) pour étendre la définition de $I(u)$ à des fonctions $W^{1,p}$, $p<n$. On ne peut pas non plus supprimer complètement une telle hypothèse, car alors le résultat est faux (*cf.* Ball-Murat [2]).

(iii) La question de savoir si $I(u)$ est faiblement semicontinue inférieurement si $1\leqq p\leqq n-1$ et $n\geqq 3$ est ouverte.

(iv) Si Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et si l'on se restreint à des transformations radiales c'est-à-dire

$$u_\nu(x)=\tilde{u}_\nu(|x|)\frac{x}{|x|}$$

avec u_ν, $u\in W^{1,n}$ on a alors (4) pour tout $p\geqq 1$. En effet si $u_\nu \rightharpoonup u$ dans $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ alors on a que pour tout $\varepsilon>0$, $\tilde{u}_\nu\rightharpoonup\tilde{u}$ dans $W^{1,1}(\varepsilon, 1)$. Des résultats classiques de semicontinuité pour les intégrales simples et du fait que $g\geqq 0$, on déduit

$$\int_{\Omega_\varepsilon} g(M(\nabla u(x)))\,dx\leqq \liminf_{\nu\to\infty}\int_{\Omega_\varepsilon} g(M(\nabla u_\nu))\,dx\leqq \liminf_{\nu\to\infty}\int_{\Omega} g(M(\nabla u_\nu))\,dx$$

où l'on a posé $\Omega_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n:\varepsilon<|x|<1\}$. En laissant ε tendre vers 0 on a tout de suite le résultat. Insistons encore sur le fait que (*cf.* Dacorogna-Murat [3]) pour de tels u_ν et u il peut arriver que $\det\nabla u_\nu$ ne converge même pas au sens des distributions [plus précisément $\lim\int\det\nabla u_\nu\,\varphi=\infty$ pour certains u_ν et $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$] si $1\leqq p<n^2/(n+2)$.

(v) La même démonstration s'applique au cas où g dépend explicitement de x mais pour autant que $g=g(x,\xi)$ soit régulière en x convexe en ξ et positive.

(vi) Enfin en combinant l'argument utilisé ci-dessous avec la démonstration de Marcellini [5] on peut démontrer la semicontinuité inférieure faible dans $W^{1,p}$ même pour des fonctions quasiconvexes (et pas seulement polyconvexes comme dans le théorème ci-dessus) satisfaisant $0\leqq f(\nabla u)\leqq\alpha(1+|\nabla u|^q)$, avec $p>q-1$.

Nous allons maintenant procéder à la démonstration du théorème.

Démonstration. — Observons tout d'abord qu'on peut trouver une suite croissante de fonctions g_k convexes, de classe C^∞, $g_k(\xi)\geqq -1$, $Dg_k(\xi)$ borné pour tout k et qui converge point par point vers g quand $k\to\infty$ (*cf.* Lemme 6.2, Marcellini [5])

On approche $u\in W^{1,n}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ par une suite $u_\varepsilon\in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ telle que

$$u_\varepsilon\to u \quad \text{dans } W^{1,n}_{\text{loc}} \text{ quand } \varepsilon\to 0. \tag{5}$$

On choisit en outre $\rho\in C_0^\infty(\Omega)$ avec $0\leqq\rho(x)\leqq 1$ et on définit pour $h>0$, $\varphi_h(s)=h$ si $s>h$, s si $|s|\leqq h$, $-h$ si $s<-h$.

En posant $u_\nu=(u_\nu^1,\ldots,u_\nu^n)$, en utilisant la positivité de g et la convexité de g_k on obtient

$$\begin{aligned} g(M(\nabla u_\nu))&\geqq\rho(x)\,\varphi_h'(u_\nu^1)\,g(M(\nabla u_\nu))\geqq\rho(x)\,\varphi_h'(u_\nu^1)\,g_k(M(\nabla u_\nu))\\ &\geqq\rho(x)\,\varphi_h'(u_\nu^1)\,g_k(M(\nabla u_\varepsilon))+\rho(x)\,\varphi_h'(u_\nu^1)\,\langle Dg_k(M(\nabla u_\varepsilon));\,M(\nabla u_\nu)-M(\nabla u_\varepsilon)\rangle,\end{aligned}$$

où $\langle \cdot,\cdot \rangle$ dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^\tau$. En intégrant l'inégalité ci-dessus, en utilisant le lemme 1 ci-dessous [avec $\psi = \rho\, Dg_k(M(\nabla u_\varepsilon))$] et en passant à la limite en ν [en notant que $\varphi'_h(u^1_\nu) \to \varphi'_h(u)$ p. p. et $|\varphi'_h(u^1_\nu)| \leqq 1$] on a

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega g(M(\nabla u_\nu)) \geqq \int_\Omega \rho(x)\, \varphi'_h(u^1)\, g_k(M(\nabla u_\varepsilon)) + \int_\Omega \rho(x)\, \varphi'_h(u^1) \langle Dg_k(M(\nabla u_\varepsilon)); M(\nabla u) - M(\nabla u_\varepsilon) \rangle.$$

Laissons maintenant ε tendre vers 0, en utilisant (5), le lemme de Fatou pour le premier terme et dans le deuxième terme le fait que pour k fixé Dg_k est borné on obtient

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega g(M(\nabla u_\nu)) \geqq \int_\Omega \rho(x)\, \varphi'_h(u^1)\, g_k(M(\nabla u)).$$

Finalement en laissant k et h tendre vers ∞ et en prenant le suprémum sur tous les $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $0 \leqq \rho \leqq 1$, on a le théorème. □

LEMME 1. — *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\psi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^\tau)$. Si $p > n-1$, si u_ν, $u \in W^{1,n}$ avec $u_\nu \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}$ alors*

$$\int_\Omega \varphi'(u^1_\nu) \langle \psi; M(\nabla u_\nu) \rangle\, dx \to \int_\Omega \varphi'(u^1) \langle \psi; M(\nabla u) \rangle\, dx$$

quand $\nu \to \infty$ ($\langle \cdot,\cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^\tau$). De plus si $n=2$ le résultat ci-dessus a lieu même si $p=1$.

Démonstration. — Nous suivons ici l'idée centrale de Müller [7]. Pour ne pas aloudir les notations nous démontrerons le résultat pour $n=2$. La démonstration du cas général est identique. Il suffit donc de montrer que

$$(6) \qquad \int_\Omega \varphi'(u^1_\nu)\, \psi \det \nabla u_\nu\, dx \to \int_\Omega \varphi'(u^1)\, \psi \det \nabla u\, dx, \qquad \nu \to \infty$$

où $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. En intégrant par parties on a pour u_ν et $u \in C^\infty$ (et par densité pour u_ν et $u \in W^{1,n}$) que

$$(7) \qquad \int_\Omega \varphi'(u^1_\nu)\, \psi \det(Du^1_\nu, Du^2_\nu) = \int_\Omega \psi \det(D(\varphi(u^1_\nu)), Du^2_\nu) = -\int_\Omega \varphi(u^1_\nu) \det(D\psi, Du^2_\nu).$$

Comme φ et φ' sont bornés, $u_\nu \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}$, $p > n-1 = 1$, on passe à la limite dans (7) et on intègre par parties la limite pour obtenir le lemme.

L'argument ci-dessus s'applique sans autre au cas $n \geqq 3$. Toutefois si $n=2$ on peut se permettre d'avoir $p=1$ (ceci nous a été suggéré par F. Murat et nous l'en remercions). En effet il suffit d'appliquer le lemme 2 ci-dessous à (7) en se rappelant que φ est borné pour obtenir le résultat. □

LEMME 2. — *Soit E un ensemble mesurable de mesure finie. Soient $a_\nu \to a$ p. p. avec $\|a_\nu\|_{L^\infty} \leqq C_0$ une constante indépendante de ν et $b_\nu \rightharpoonup b$ dans $L^1(E)$, alors $a_\nu b_\nu \rightharpoonup ab$ dans $L^1(E)$.*

Démonstration. — De l'équiintégrabilité de b_ν on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ tel que

$$(8) \qquad \operatorname{mes} A \leqq \lambda \;\Rightarrow\; \int_A |b_\nu| \leqq \varepsilon, \quad \text{pour tout } \nu.$$

Par le théorème d'Egorov, on a qu'il existe $E_\varepsilon \subset E$ mesurable avec $\text{mes}\, E_\varepsilon \leqq \lambda$ tel que $a_\nu \to a$ dans $L^\infty(E - E_\varepsilon)$. On déduit alors immédiatement que $a_\nu b_\nu \rightharpoonup ab$ dans $L^1(E - E_\varepsilon)$. En combinant ceci avec (8) et le fait que a_ν soit uniformément borné, on obtient le résultat souhaité. □

Note remise le 28 juin 1990, acceptée le 3 juillet 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. M. BALL, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 63, 1977, p. 337-403.

[2] J. M. BALL et F. MURAT, $W^{1,p}$ quasiconvexity and variational problems for multiple integrals, *J. Funct. Anal.*, 58, 1984, p. 225-253.

[3] B. DACOROGNA et F. MURAT, preprint, 1990.

[4] M. GIAQUINTA, G. MODICA et J. SOUCEK, Cartesian currents, weak diffeomorphisms and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 106, 1989, p. 97-159 et Erratum, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 109, 1990, p. 385-392.

[5] P. MARCELLINI, On the definition and the lower semicontinuity of certain quasiconvex integrals, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non lin.*, 3, 1986, p. 391-409.

[6] C. B. MORREY, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer Berlin, 1966.

[7] S. MÜLLER, Weak continuity of determinants and nonlinear elasticity, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 307, série I, 1988, p. 501-506.

[8] Y. RESHETNYAK, Stability theorems for mappings with bounded excursions, *Sib. Math. J.*, 9, 1968, p. 499-512.

B. D. : *Département de Mathématiques, E.P.F.L., CH* 1015 *Lausanne, Suisse ;*

P. M. : *Dipartimento di Matematica "U. Dini", Viale Morgagni 67/A, I* 50134 *Firenze, Italy.*