Sur un problème non linéaire pour la divergence et le déterminant

B. DACOROGNA
Section de Mathématiques, EPFL
1015 Lausanne, Suisse
bernard.dacorogna@epfl.ch

November 2, 2015

Abstract

On étudie dans cet article, dédié à Denis Serre pour ses soixante ans, les problèmes

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi = f(x, \varphi, \nabla\varphi) & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On montre que sous des hypothèses appropriées les deux problèmes sont résolubles sans conditions intégrales.

1 Introduction

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier et $f = f(x, y, z)$. On va étudier les deux problèmes suivants

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = f(x, u(x), \nabla u(x)) & x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi = f(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est évident que si la fonction f ne dépend que de x, le premier problème est résoluble (si et) seulement si

$$\int_\Omega f = \int_\Omega \operatorname{div} u_0$$

et le second (si et) seulement si

$$\int_{\Omega} f = \operatorname{mes} \Omega.$$

Par contre dès que f dépend aussi de (y, z), dans de nombreux cas (cf. Théorème 3 pour le premier cas et Théorème 5 pour le second) les conditions intégrales ne sont plus nécessaires. Ce phénomène apparaît déjà dans le premier cas même si f est linéaire en la variable y et sans dépendance en z (cf. Théorème 1) comme étudié par Csato-Dacorogna [3].

2 Notations et hypothèses

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$. On dénotera par

$$f_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y_n} \right) \in \mathbb{R}^n$$

et idem pour $f_z \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Voici les hypothèses que nous utiliserons dans cet article.

(i) On va noter, pour $u \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$,

$$f[u] = f[u](x) = f(x, u(x), \nabla u(x))$$

et de même pour $f_y[u]$ et $f_z[u]$ à savoir

$$f_y[u](x) = f_y(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{et} \quad f_z[u](x) = f_z(x, u(x), \nabla u(x)).$$

(ii) On aura toujours que $n \geq 2$ et $r \geq 0$ sont des entiers, $0 < \overline{s} \leq s < 1$, $u_0 \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$.

(iii) On supposera, entre autres, que $f \in C^{r,s}\left(\overline{V}\right)$ où

$$V = \Omega \times B^n \times B^{n\times n}$$

et B^m est la boule unité de $\mathbb{R}^m$ et on supposera de plus qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\|f_y\|_{C^{r+1,s}\left(\overline{V}\right)} + \|f_z\|_{C^{r+1,s}\left(\overline{V}\right)} \leq \lambda.$$

Si $r = 0$, il faut remplacer l'hypothèse précédente par

$$\|f_y\|_{C^{1,1}\left(\overline{V}\right)} + \|f_z\|_{C^{1,1}\left(\overline{V}\right)} \leq \lambda.$$

(iv) Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sera toujours supposé régulier et borné.

3 Le cas de la divergence inhomogène

On commence par discuter le cas linéaire. Voici le théorème (cf. Théorème 3 dans [3]) que nous utiliserons ci-après.

Théorème 1 *Soient* $g \in C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right)$, $u_0 \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ *et* $a \in C^{r+4,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ *tel que*

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\left\{\left|\operatorname{rot} a\left(x\right)\right|\right\} \geq \delta > 0.$$

Alors il existe $u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ *satisfaisant*

$$\begin{cases} \operatorname{div} u + \langle a; u\rangle = g & \textit{dans } \Omega \\ u = u_0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus la correspondance $(g, u_0) \to u$ *peut être choisie linéaire et il existe* $c = c\left(r, s, \Omega, \|a\|_{C^{r+4,s}}, \delta\right)$ *tel que*

$$\|u\|_{C^{r+1,s}} \leq c\left(\|g\|_{C^{r,s}} + \|u_0\|_{C^{r+1,s}}\right).$$

Remarque 2 (i) Du point de vue de la régularité le théorème est optimal pour g, u_0 et u, mais pas pour a. La régularité optimale devrait être $a \in C^{r,s}$.

(ii) En fait l'hypothèse $\operatorname{rot} a \neq 0$ sur $\partial\Omega$ peut être affaiblie. La condition optimale est que a n'est pas un gradient. Il est en effet établi dans [3] (cf. Théorème 2) que si le domaine est simplement connexe, alors le résultat est vrai (mais sans la régularité optimale sur a, g et u_0) sous la seule hypothèse

$$\operatorname{rot} a\left(x_0\right) \neq 0 \quad \text{pour un certain } x_0 \in \Omega.$$

(iii) Dans [3] (cf. Théorème 5), il est aussi montré que si $g \in C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right)$ $u_0 \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ et $a \in C^{r,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ est tel que

$$\operatorname{rot} a \equiv 0 \text{ dans } \overline{\Omega} \quad \text{mais} \quad \nexists\, A \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ avec } a = \operatorname{grad} A$$

(ce qui implique que le domaine Ω n'est pas simplement connexe), alors il existe $u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right)$ satisfaisant toutes les conclusions du théorème ci-dessus.

(iv) Soient

$$X = \left\{u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n\right) : u|_{\partial\Omega} = u_0\right\}, \quad Y = C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right)$$

et L l'opérateur qui à $u \in X$ associe $g \in Y$ tel que

$$\operatorname{div} u + \langle a; u\rangle = g.$$

La construction du théorème montre qu'il existe un opérateur linéaire $L^{-1} : Y \to X$ qui associe à tout $g \in Y$ un unique $u \in X$ tel que $Lu = g$. En conclusion, même si le problème considéré dans le théorème a une infinité de solutions, le processus de construction est linéaire et choisit un unique élément.

4 Le cas de la divergence non linéaire

On va supposer pour ce cas qu'en outre

$$\left\| f_y \left[u_0 \right] \right\|_{C^{r+4,s}\left(\overline{V}\right)} \leq \mu, \; f_z \left[u_0 \right] \equiv 0 \text{ et } \inf_{x \in \partial\Omega} \left\{ \left| \operatorname{rot} \left[f_y \left[u_0 \right] \right] (x) \right| \right\} \geq \delta > 0. \tag{1}$$

Par la suite on dénotera une norme $\|u\|_{C^{a,b}\left(\overline{\Omega}\right)}$ par seulement $\|u\|_{C^{a,b}}$.

Théorème 3 *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe* $\epsilon = \epsilon\left(r, s, \Omega, \delta, \lambda, \mu\right) > 0$ *tel que si*

$$\left\| \operatorname{div} u_0 - f\left[u_0\right] \right\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \epsilon$$

alors il existe $u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ *satisfaisant*

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = f\left[u\right] & \textit{dans } \Omega \\ u = u_0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et de plus il existe $c = c\left(r, s, \Omega, \delta, \lambda, \mu\right) > 0$ *tel que*

$$\left\| u - u_0 \right\|_{C^{r+1,s}} \leq c \left\| \operatorname{div} u_0 - f\left[u_0\right] \right\|_{C^{r,s}} .$$

Remarque 4 (i) Il faut faire attention à l'interprétation du résultat (cf. Exemple 8). En effet le problème de l'estimation

$$\left\| \operatorname{div} u_0 - f\left[u_0\right] \right\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \epsilon$$

est qu'elle fait apparaître f à gauche et à droite (dans le ϵ). Si par contre (cf. Exemple 7)

$$f\left(x, y, z\right) = g\left(x\right) + h\left(x, y, z\right)$$

avec $h\left[u_0\right] = 0$, alors la condition devient

$$\left\| g - \operatorname{div} u_0 \right\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \epsilon$$

et le ϵ ne dépend pas de g.

(ii) En utilisant la Remarque 2 (iii) on peut remplacer les hypothèses (1) par $f_z\left[u_0\right] \equiv 0$ et

$$\operatorname{rot} f_y\left[u_0\right] \equiv 0 \quad \text{mais} \quad \nexists\, A \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ avec } f_y\left[u_0\right] = \operatorname{grad} A$$

et obtenir le théorème.

Démonstration Le théorème est démontré en combinant l'estimation linéaire (cf. Théorème 1) et un point fixe élémentaire (comme dans [1] ou [2]).

Etape 1. On se ramène d'abord au cas où $u_0 = 0$. On pose $u = v + u_0$, l'équation devient alors

$$\operatorname{div} u = \operatorname{div} v + \operatorname{div} u_0 = f\left(x, v + u_0, \nabla v + \nabla u_0\right)$$

Donc si on pose

$$\widetilde{f}(x,y,z) = f(x, y+u_0(x), z+\nabla u_0(x)) - \operatorname{div} u_0(x)$$

on a que

$$\operatorname{rot}\left[\widetilde{f}_y[0]\right](x) = \operatorname{rot}[f_y[u_0]](x) \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega$$

et

$$\widetilde{f}_z[0](x) = f_z[u_0](x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

On a ainsi réduit le problème à

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = \widetilde{f}[v] & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Etape 2. On pose $q = f - f[0] - \langle f_y[0]; y\rangle$, c'est à dire

$$q(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,0,0) - \langle f_y(x,0,0); y\rangle .$$

Comme $f_z(x,0,0) = 0$, on a que

$$q[0] \equiv 0, \quad q_y[0] \equiv 0 \quad \text{et} \quad q_z[0] \equiv 0. \tag{2}$$

Donc le problème devient

$$\begin{cases} \operatorname{div} u - \langle f_y[0]; u\rangle = f[0] + q[u] & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou encore l'équation dans Ω se lit

$$\operatorname{div} u(x) - \langle f_y(x,0,0); u(x)\rangle = f(x,0,0) + q(x, u(x), \nabla u(x)) .$$

Etape 3. Soient

$$X_1 = \left\{v \in C^{1,\overline{s}}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right) : v|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \quad X_2 = \left\{v \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right) : v|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

$$Y_1 = C^{0,\overline{s}}\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{et} \quad Y_2 = C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Observer que l'hypothèse (H_{XY}) du Théorème 18.1 dans [4] est satisfaite. On définit ensuite l'opérateur

$$Lu = \operatorname{div} u - \langle f_y[0]; u\rangle .$$

Par le Théorème 1 on a que $L : X_2 \to Y_2$ est tel que, pour tout $g \in Y_2$, il existe un unique $v \in X_2$ satisfaisant $Lv = g$ (l'unicité doit être comprise dans le sens de la Remarque 2 (iv)) et il existe une constante $c_1 = c_1(r, s, \Omega, \delta, \mu) > 0$ telle que

$$\left\|L^{-1} g\right\|_{X_i} \leq c_1 \|g\|_{Y_i} \quad \forall\, g \in Y_2,\ i = 1, 2.$$

L'hypothèse (H_L) du Théorème 18.1 dans [4] est donc vérifiée.

Etape 4. Soit l'opérateur non linéaire

$$Q(u) = q[u]$$

et montrons que Q satisfait l'hypothèse (H_Q) du Théorème 18.1 dans [4]. De façon plus précise on va établir que

$$Q : B = \left\{u \in X_2 : \|u\|_{X_1} \leq 1\right\} \to Y_2$$

et qu'il existe une constante $c_2 = c_2(r, s, \Omega, \lambda) > 0$ telle que

$$\|Q(u) - Q(v)\|_{Y_1} \leq c_2 \left(\|u\|_{X_1} + \|v\|_{X_1}\right) \|u - v\|_{X_1} \tag{3}$$

$$\|Q(v)\|_{Y_2} \leq c_2 \|v\|_{X_1} \|v\|_{X_2} \tag{4}$$

pour tout $u, v \in B$.

Etape 4.1. Commençons par une étape préliminaire. Noter que, comme $q[0] \equiv 0$ (cf. (2)),

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[q(x, ty, tz)\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\langle q_y(x, ty, tz); y\rangle + \langle q_z(x, ty, tz); z\rangle\right] dt \end{aligned}$$

et donc, en se rappelant que $q_y[0] \equiv 0$ et $q_z[0] \equiv 0$ (cf. (2)),

$$Q[u] = \int_0^1 \left[\langle q_y[tu] - q_y[0]; u\rangle + \langle q_z[tu] - q_z[0]; \nabla u\rangle\right] dt.$$

Comme les deux termes vont être estimés de la même façon et que le t et l'intégrale ne jouent aucun rôle dans l'estimation, on va prouver (3) et (4) pour

$$Q[u] = \langle q_z[u]; \nabla u\rangle = \langle q_z[u] - q_z[0]; \nabla u\rangle .$$

Par la suite on dénotera par $\gamma_i = \gamma_i(r, s, \Omega, \lambda) > 0$ des constantes.

Etape 4.2. Montrons l'inégalité (3). On a que

$$\begin{aligned} Q[v] - Q[w] &= \langle q_z[v]; \nabla v\rangle - \langle q_z[w]; \nabla w\rangle \\ &= \langle q_z[v] - q_z[w]; \nabla v\rangle + \langle q_z[w] - q_z[0]; \nabla v - \nabla w\rangle . \end{aligned}$$

Par le Théorème 16.28 dans [4] on trouve

$$\begin{aligned} \|Q[v] - Q[w]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq{} & \gamma_1 \|q_z[v] - q_z[w]\|_{C^{0,\overline{s}}(\overline{V})} \|v\|_{C^{1,\overline{s}}} \\ & + \gamma_1 \|q_z[w] - q_z[0]\|_{C^{0,\overline{s}}(\overline{V})} \|v - w\|_{C^{1,\overline{s}}} . \end{aligned}$$

On déduit donc, en se rappelant que $\|v\|_{C^{1,\overline{s}}}, \|w\|_{C^{1,\overline{s}}} \leq 1$, (cf. Théorème 16.36 dans [4])

$$\|Q[v]-Q[w]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \gamma_2 \|q_z\|_{C^{1,1}(\overline{V})} \left[\|v-w\|_{C^{1,\overline{s}}} \|v\|_{C^{1,\overline{s}}} + \|w\|_{C^{1,\overline{s}}} \|v-w\|_{C^{1,\overline{s}}}\right]$$

et ainsi

$$\|Q[v]-Q[w]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \gamma_3 \left[\|v\|_{C^{1,\overline{s}}} + \|w\|_{C^{1,\overline{s}}}\right] \|v-w\|_{C^{1,\overline{s}}}$$

ce qui est exactement (3).

Etape 4.3. Prouvons l'inégalité (4). A nouveau par le Théorème 16.28 dans [4]

$$\|Q[v]\|_{C^{r,s}} \leq \gamma_1 \left[\|q_z[v]\|_{C^0(\overline{V})} \|v\|_{C^{r+1,s}} + \|q_z[v]\|_{C^{r,s}(\overline{V})} \|v\|_{C^1}\right].$$

On distingue alors deux cas.

Cas 1: $r=0$. On obtient alors (cf. Théorème 16.36 dans [4])

$$\|Q[v]\|_{C^{0,s}} \leq \gamma_2 \|q_z\|_{C^{1,1}(\overline{V})} \left[\|v\|_{C^1} \|v\|_{C^{1,s}} + \|v\|_{C^{1,s}} \|v\|_{C^1}\right].$$

qui implique

$$\|Q[v]\|_{C^{0,s}} \leq \gamma_3 \|v\|_{C^{1,\overline{s}}} \|v\|_{C^{1,s}}$$

comme souhaité.

Cas 2: $r \geq 1$. On a alors (cf. Théorème 16.36 dans [4]) que

$$\|Q[v]\|_{C^{r,s}} \leq \gamma_2 \|q_z\|_{C^{1,1}(\overline{V})} \|v\|_{C^1} \|v\|_{C^{r+1,s}} + \gamma_2 \|q_z\|_{C^{r+1,s}(\overline{V})} \|v\|_{C^{r+1,s}} \|v\|_{C^1}.$$

Ceci nous conduit à

$$\|Q[v]\|_{C^{r,s}} \leq \gamma_3 \|v\|_{C^{1,\overline{s}}} \|v\|_{C^{r+1,s}}$$

et donc (4) est bien démontrée.

Etape 5. Par le Théorème 18.1 dans [4], on déduit que, pour tout $f \in Y_2 = C^{r,s}\left(\overline{\Omega}\right)$, satisfaisant

$$\|f[0]\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \epsilon = \min\left\{\frac{1}{8c_1^2 c_2}, \frac{1}{2c_1}\right\}$$

alors le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div} u - \langle f_y[0]; u\rangle = f[0] + q[u] & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

a une solution $u \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ vérifiant

$$\|u\|_{X_i} \leq 2c_1 \|f[0]\|_{Y_i}.$$

Le théorème est donc démontré. ■

5 Le cas du déterminant

On suppose maintenant que (id dénote l'application identité, i.e. $\mathrm{id}(x) = x$)

$$\|f_y[\mathrm{id}]\|_{C^{r+4,s}(\overline{V})} \leq \mu, \;\; f_z[\mathrm{id}] \equiv 0 \text{ et } \inf_{x\in\partial\Omega} \{|\mathrm{rot}\,[f_y[\mathrm{id}]](x)|\} \geq \delta > 0. \tag{5}$$

Théorème 5 *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $\epsilon = \epsilon(r, s, \Omega, \delta, \lambda, \mu) > 0$ tel que si*

$$\|f[\mathrm{id}] - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \epsilon$$

alors il existe $\varphi \in \mathrm{Diff}^{\,r+1,s}\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n\right)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi = f(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

et de plus il existe $c = c(r, s, \Omega, \delta, \lambda, \mu) > 0$ tel que

$$\|\varphi - \mathrm{id}\|_{C^{r+1,s}} \leq c\,\|f[\mathrm{id}] - 1\|_{C^{r,s}}\;.$$

Remarque 6 (i) Comme déjà indiqué il faut être très prudent dans l'interprétation de l'estimation

$$\|f[\mathrm{id}] - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \epsilon$$

sinon (cf. Exemple 8) on arrive à une contradiction. Par contre si f a une structure spéciale (cf. Exemple 7), alors le résultat est plus facile à interpréter.

(ii) En utilisant la Remarque 4 (ii) on peut remplacer les hypothèses (5) par $f_z[\mathrm{id}] \equiv 0$ et

$$\mathrm{rot}\, f_y[\mathrm{id}] \equiv 0 \quad \text{mais} \quad \nexists\, A \in C^{r+1,s}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ avec } f_y[\mathrm{id}] = \mathrm{grad}\, A$$

et obtenir le théorème.

Commençons par un exemple où le théorème s'applique bien.

Exemple 7 Soit

$$f(x, y, z) = g(x) + h(x, y, z)$$

où

$$\|h_y\|_{C^{r+1,s}(\overline{V})} + \|h_z\|_{C^{r+1,s}(\overline{V})} \leq \lambda \quad \text{et} \quad \|h_y[\mathrm{id}]\|_{C^{r+4,s}(\overline{V})} \leq \mu$$

$$h[\mathrm{id}] \equiv 0, \quad h_z[\mathrm{id}] \equiv 0 \quad \text{et} \quad \inf_{x\in\partial\Omega} \{|\mathrm{rot}\,[h_y[\mathrm{id}]](x)|\} \geq \delta > 0.$$

Alors le théorème dit qu'il existe $\epsilon = \epsilon(r, s, \Omega, \delta, \lambda, \mu) > 0$ tel que si

$$\|g - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \epsilon$$

alors on a une solution. Noter que le membre de gauche est indépendant de (δ, λ, μ). Un exemple encore plus explicite est donné par

$$h(x, y, z) = \langle a(x); y - x\rangle + |z - I|^2$$

où $\inf_{x\in\partial\Omega} \{|\mathrm{rot}\, a(x)|\} \geq \delta > 0$.

Voyons maintenant un exemple où il peut y avoir un problème.

Exemple 8 Soient $f(x,y,z) = a(x)\, b(y)$ où

$$a(x_1,x_2) = 1+\alpha x_1 \quad \text{et} \quad b(y_1,y_2) = 1+\alpha y_2\,.$$

Noter que $f_z \equiv 0$, $f_y = (1+\alpha x_1)(0,\alpha)$ et donc

$$\operatorname{rot} f_y \equiv \alpha^2.$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \det \nabla\varphi = f(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) = a(x)\, b(\varphi(x)) & x \in \Omega \\ \varphi(x) = x & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On sait que pour résoudre ce problème (cf. le théorème classique dans [5]) il faut (et il suffit) que

$$\int_\Omega \frac{dx}{b(x)} = \int_\Omega a(x)\, dx.$$

Toutefois le Théorème 5 a l'air de s'appliquer si

$$\|f[\mathrm{id}] - 1\|_{C^{0,\overline{s}}} = \|ab-1\|_{C^{0,\overline{s}}} \leq \epsilon$$

ce qu'on peut apparemment toujours faire en choisissant α suffisamment petit. Le problème est que le ϵ dépend de $\inf_{\partial\Omega}\{|\operatorname{rot} f_y|\} = \alpha^2$, ce qui fait que le théorème est inapplicable.

Démonstration Notons

$$h(z) = \det(I+z) - (1+\operatorname{trace}(z))$$

(remarquer que h est surquadratique) et

$$g(x,y,z) = f(x,x+y,I+z) - 1 - h(z)\,.$$

Observer alors que, si $\varphi = \mathrm{id} + u$,

$$\det\nabla\varphi = \det(I+\nabla u) = 1 + \operatorname{div} u + h(\nabla u)$$

et donc l'équation $\det\nabla\varphi = f[\varphi]$ devient

$$\operatorname{div} u = f(x,x+u(x),I+\nabla u(x)) - 1 - h(\nabla u) = g(x,u(x),\nabla u(x))\,.$$

On peut donc appliquer le Théorème 3 avec $f = g$ et $u_0 = 0$ pour obtenir le résultat. ■

References

[1] Basterrechea S., thèse EPFL 6693 (2015).

[2] Basterrechea S. et Dacorogna B., Existence of solutions for Jacobian and Hessian equations under smallness assumptions, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **35** (2014), 868-892.

[3] Csato G. et Dacorogna B., A Dirichlet problem involving the divergence operator, à paraître dans *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.*

[4] Csato G., Dacorogna B. et Kneuss O., *The pullback equation for differential forms*, Birkhaüser, 2012.

[5] Dacorogna B. et Moser J., On a partial differential equation involving the Jacobian determinant, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **7** (1990), 1–26.