Résolution du problème de Dirichlet pour l'équation du Jacobien prescrit via l'équation de Monge-Ampère

G. Carlier * et B. Dacorogna †

March 31, 2012

Résumé

Nous donnons une preuve alternative, basée sur l'équation de Monge-Ampère du résultat de Dacorogna et Moser [4] sur la résolution avec la régularité optimale du problème de Dirichlet pour l'équation du Jacobien prescrit.

Abstract

We give an alternative proof, based on the Monge-Ampère equation, of Dacorogna and Moser's result [4] on the solvability with optimal regularity of the Dirichlet problem for the prescribed Jacobian equation.

Abriged english version

The aim of this note is to give an alternative proof on a convex domain (up to a diffeomorphism) of Dacorogna and Moser's result [4] on the solvability of the Dirichlet problem for the prescribed Jacobian equation:

Theorem 1 *Let $r \geq 0$ an integer, $0 < \alpha < 1$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be open, bounded, uniformly convex with $C^{r+2,\alpha}$ boundary. Let $f \in C^{r,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ such that $f > 0$ on $\overline{\Omega}$ and $\int_\Omega f = \operatorname{mes}\Omega$, then there exists $u \in \operatorname{Diff}^{r+1,\alpha}\left(\overline{\Omega};\overline{\Omega}\right)$ such that*

$$\det(\nabla u) = f \text{ in } \Omega \quad \text{and} \quad u = \mathrm{id} \text{ on } \partial\Omega. \tag{1}$$

We shall first use Caffarelli's regularity theory [2] for the Monge-Ampère equation

$$\det(\nabla^2\varphi) = f \text{ in } \Omega, \quad \varphi \text{ convex} \quad \text{and} \quad \nabla\varphi(\Omega) = \Omega \tag{2}$$

* Université Paris Dauphine, CEREMADE, Pl. de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, FRANCE carlier@ceremade.dauphine.fr

† Section de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1015 Lausanne, Suisse bernard.dacorogna@epfl.ch

and then solve

$$\det(\nabla s) = 1 \text{ in } \Omega \quad \text{and} \quad s = \nabla\varphi^{-1} \text{ on } \partial\Omega \tag{3}$$

so that $u := s \circ \nabla\varphi$ solves (1). Not only Caffarelli's regularity theory will be crucial to solve (2) with the optimal regularity but also to solve (3) thanks to some isotopy (homotopy formed by diffeomorphisms) between the identity map and $\nabla\varphi^{-1}$ on $\partial\Omega$. The only restriction with respect to Dacorogna and Moser (cf. [3] for the optimal regularity of the domain) lies in the fact that the domain is required to be uniformly convex (up to a diffeomorphism). Moreover, the optimal regularity is obtained through the regularity theory for Monge-Ampère whereas in [4] it follows from the more elementary theory for the Laplacian. Nevertheless, the approach developed in this note is more generic in the sense that *every* smooth solution u of (1) is of the form $u = s \circ \nabla\varphi$ for some s solving (3). Let us remark that the form $u = s \circ \nabla\varphi$ where s is measure preserving and φ convex is naturally linked to Brenier's polar factorization (in which the composition order is reversed) of u^{-1}.

Finally, the proof we give is the nonlinear analogue of the solution (for zero mean f) of

$$\operatorname{div} u = f \text{ in } \Omega \quad \text{and} \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

Indeed, the "optimal" way to solve this linear problem is to look for solutions of the form $u = \nabla\varphi + s$ with $\operatorname{div} s = 0$ and

$$\Delta\varphi = f \text{ in } \Omega \quad \text{and} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

1 Introduction

Etant donnés un ouvert connexe borné régulier Ω et $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$, $f > 0$ telle que $\int_\Omega f = \operatorname{mes}\Omega$, Dacorogna et Moser [4] ont montré que l'équation du Jacobien prescrit avec condition de Dirichlet:

$$\det(\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad u = \text{id} \text{ sur } \partial\Omega \tag{4}$$

peut être résolue avec la régularité optimale c'est à dire possède au moins une solution dans $\mathrm{Diff}^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega};\overline{\Omega})$. Nous nous proposons dans cette note, d'aborder cette question par une approche tout à fait différente mais très naturelle qui consiste dans un premier temps à résoudre l'équation de Monge-Ampère

$$\det(\nabla^2\varphi) = f \text{ dans } \Omega, \quad \varphi \text{ convexe} \quad \text{et} \quad \nabla\varphi(\Omega) = \Omega \tag{5}$$

ce qui revient à dire que $\nabla\varphi$ est le transport optimal de Brenier [1] entre f et la mesure uniforme. Le transport optimal de Brenier ne vérifiant pas en général la condition de Dirichlet de (4), on cherche donc dans un deuxième temps à rectifier les valeurs sur le bord en résolvant

$$\det(\nabla s) = 1 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad s = \nabla\varphi^{-1} \text{ sur } \partial\Omega \tag{6}$$

de sorte que $u := s \circ \nabla\varphi$ résout (4). La théorie de la régularité optimale pour l'équation de Monge-Ampère (5) et le transport optimal de Caffarelli [2] est évidemment essentielle dans la première étape mais aussi, ce qui est plus étonnant, pour la résolution de (6) car elle va nous permettre de construire une isotopie (homotopie restant dans la classe des difféomorphismes) entre l'identité et $\nabla\varphi^{-1}$ sur $\partial\Omega$; on pourra alors résoudre (6) par la méthode du flot de Moser. La seule restriction par rapport aux résultats de Dacorogna et Moser (cf. [3] pour une régularité optimale du domaine) est qu'ici le domaine est uniformément convexe (à un difféomorphisme près). Par ailleurs la régularité est obtenue ici grâce à la régularité des solutions de l'équation de Monge-Ampère alors que dans [4] elle résulte de façon plus élémentaire de celle du Laplacien. En revanche, l'approche de cette note est en un sens plus générique dans la mesure où *toute* solution u régulière de (4) est de la forme $u = s \circ \nabla\varphi$ avec φ solution de (5) ($\nabla\varphi$ est un difféomorphisme) pour un certain s régulier résolvant (6). Indiquons, par simple curiosité que la forme $u = s \circ \nabla\varphi$ avec s préservant la mesure et φ convexe est naturellement reliée à la factorisation polaire de Brenier (dans laquelle l'ordre de la composition est inversé) de u^{-1}.

Enfin, la démonstration que nous donnons ici est l'analogue non linéaire de la résolution du problème (où f est de moyenne nulle)

$$\operatorname{div} u = f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

En effet, la façon "optimale" de résoudre le problème linéaire est en cherchant des solutions de la forme $u = \nabla\varphi + s$ avec $\operatorname{div} s = 0$ et

$$\Delta\varphi = f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

2 L'équation de Monge Ampère

Théorème 1 *Soit $r \geq 0$ un entier, $0 < \alpha < 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné uniformément convexe et de bord C^{r+2}. Soit f et $g \in C^{r,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ telles que $f > 0$, $g > 0$ dans $\overline{\Omega}$ et $\int_\Omega f = \int_\Omega g$. Alors, l'équation de Monge-Ampère*

$$g(\nabla\varphi)\det(\nabla^2\varphi) = f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \nabla\varphi(\Omega) = \Omega \tag{7}$$

a une et une seule (à une constante additive près) solution convexe $\varphi \in C^{r+2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. En outre $\nabla\varphi \in \mathrm{Diff}^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega};\overline{\Omega})$ et en particulier $\nabla\varphi(\partial\Omega) = \partial\Omega$. De plus il existe une constante

$$C = C\left(\|f\|_{C^{r,\alpha}}, \|g\|_{C^{r,\alpha}}, \|1/f\|_{C^{r,\alpha}}, \|1/g\|_{C^{r,\alpha}}\right)$$

telle que

$$\|\left(\nabla\varphi\right)^{-1}\|_{C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\nabla\varphi\|_{C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C.$$

Notons que $\nabla\varphi$ est le transport optimal de Brenier entre f et g. La régularité $C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ est due à Caffarelli [2] (voir aussi Urbas [9] pour une approche différente qui demande un peu plus de régularité). Le fait que $\nabla\varphi$ laisse $\partial\Omega$ invariant (et donc soit un difféomorphisme de $\partial\Omega$) découle du fait que $\nabla\varphi$ est un difféomorphisme et du théorème d'invariance du domaine (cf. Théorème 19.6 de [3]). Notant que $\nabla\varphi^* = (\nabla\varphi)^{-1}$ est le transport optimal de Brenier entre g et f le résultat précédent fournit aussi la régularité $C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega};\overline{\Omega})$ de $\nabla\varphi^*$ (et donc la convexité uniforme de φ c'est à dire une monotonie uniforme de $\nabla\varphi$: il existe $\alpha > 0$ tel que $\langle\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y); x - y\rangle \geq \alpha|x-y|^2$ pour tout $(x, y) \in \Omega^2$).

Corollaire 2 *Soit $r \geq 0$ un entier, $0 < \alpha < 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné uniformément convexe et de bord $C^{r+2,\alpha}$. Soit $g \in C^{r,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que $g > 0$ dans $\overline{\Omega}$ et $\int_\Omega g = \operatorname{mes}\Omega$. Pour $t \in [0, 1]$, soit ψ_t la solution convexe de l'équation de Monge-Ampère*

$$\det\nabla^2\psi_t = 1 + t(g-1) \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \nabla\psi_t(\Omega) = \Omega \tag{8}$$

alors $\frac{d}{dt}\nabla\psi_t \in L^\infty([0, 1]; C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}))$.

Démonstration En procédant comme dans la preuve de la Proposition 4.1 de Loeper [7] (à laquelle nous renvoyons pour une justification rigoureuse par le thèorème des fonctions implicites de cette linéarisation) on montre que $\nabla u_t := \frac{d}{dt}\nabla\psi_t$ est la solution de l'équation linéarisée

$$\operatorname{trace}\left([\nabla^2\psi_t]^{-1}\nabla^2 u_t\right) = \frac{g-1}{1+t(g-1)} \quad \text{dans } \Omega \tag{9}$$

avec la condition aux limites

$$\langle\nabla u_t; \nu(\nabla\psi_t)\rangle = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{10}$$

où $\nu(z)$ désigne la normale extérieure à Ω en $z \in \partial\Omega$. Notons ρ une jauge de Ω (i.e. $\rho(x) := \inf\{\lambda > 0 \ : \ x_0 + \lambda^{-1}(x - x_0) \in \Omega\}$ où x_0 est un point fixé de Ω). La condition (10) s'obtient simplement en dérivant par rapport à t la condition $\rho(\nabla\psi_t) = 1$ sur $\partial\Omega$ et en notant que $\nabla\rho$ est proportionnel à ν sur $\partial\Omega$. On remarque ensuite que la condition aux limites est de type oblique au sens où $\langle\nu(z); \nu(\nabla\psi_t)\rangle \geq 0$ (voir par exemple la Proposition 3.4 de [5]), dérivant (par rapport à $x \in \partial\Omega$ cette fois) la relation $\rho(\nabla\psi_t) = 1$ on obtient

$$\nabla^2\psi_t(x)\nabla\rho(\nabla\psi_t(x)) = \lambda(t, x)\nabla\rho(x)$$

pour un scalaire $\lambda(t, x) \geq 0$ (et borné grâce au Théorème 1). De

$$\lambda(t, x)\,\langle\nabla\rho(x); \nabla\rho(\nabla\psi_t(x))\rangle = \left\langle\nabla^2\psi_t(x)\nabla\rho(\nabla\psi_t(x)); \nabla\rho(\nabla\psi_t(x))\right\rangle$$

et de la convexité uniforme de ψ_t, on déduit que la condition (10) est uniformément strictement oblique, dans le sens où il existe α, indépendant de t et de $z \in \partial\Omega$, tel que

$$\langle\nu(z); \nu(\nabla\psi_t)\rangle \geq \alpha > 0.$$

L'ellipticité uniforme et la régularité des coefficients de (9) fournies par le Théorème 1 permet donc d'utiliser des résultats standards (cf. Théorème 6.30 de [6]) pour les problèmes elliptiques linéaires avec condition aux limites uniformément strictement oblique pour obtenir une estimation $C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ de ∇u_t (uniforme en t). ■

3 Une nouvelle démonstration du théorème de Dacorogna-Moser

Pour remédier au fait que le gradient de la solution φ de l'équation de Monge-Ampère ne stabilise le bord de Ω que globalement nous allons construire une homotopie entre l'identité et $\nabla\varphi^*$ sur $\partial\Omega$ qui reste dans la classe des difféomorphismes (c'est ce qu'on appelle une isotopie). Le fait que $\nabla\varphi^*$ soit de degré topologique égal à un ne suffit a priori pas à assurer que $\nabla\varphi^*$ soit isotope à l'identité (à part dans certains cas très simples comme celui de la dimension 2). En effet, Milnor [8] a montré qu'il existait des difféomorphismes de degré un de S^6 non isotopes à l'identité.

Théorème 3 *Soit $r \geq 0$ un entier, $0 < \alpha < 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné uniformément convexe et de bord $C^{r+2,\alpha}$. Soit $\varphi \in C^{r+2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ une fonction uniformément convexe, telle que $\nabla\varphi \in \mathrm{Diff}^{r+1,\alpha}\left(\partial\Omega;\partial\Omega\right)$. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, il existe $\varphi_t \in C^{r+2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ uniformément convexe avec $\nabla\varphi_0 = \mathrm{id}$, $\nabla\varphi_1 = \nabla\varphi^*$ et*

$$\nabla\varphi_t \in \mathrm{Diff}^{r+1,\alpha}\left(\partial\Omega;\partial\Omega\right), \quad \frac{d}{dt}\nabla\varphi_t \in C^{r+1,\alpha}\left(\partial\Omega;\mathbb{R}^n\right).$$

De plus, il existe $s \in \mathrm{Diff}^{r+1,\alpha}\left(\overline{\Omega};\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$\det\left(\nabla s\right) = 1 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad s = \nabla\varphi^* \text{ sur } \partial\Omega. \tag{11}$$

Démonstration L'existence de l'isotopie $\nabla\varphi_t$ s'obtient immédiatement en appliquant le Corollaire 2 à $g = \det\left(\nabla^2\varphi^*\right)$. On définit ensuite le champ vectoriel $w_t \in C^{r+1,\alpha}\left(\overline{\Omega};\overline{\Omega}\right)$ par

$$w_t\left(\nabla\varphi_t(y)\right) = \frac{d}{dt}\nabla\varphi_t\left(y\right) \text{ pour tout } y \in \overline{\Omega}.$$

(Pour les propriétés fines sur les fonctions de Hölder cf. [3]). Par construction, on a $\langle w_t;\nu\rangle = 0$ (ν désignant la normale extérieure unité à $\partial\Omega$) et le Théorème 9.2 de [3] permet de trouver $u_t \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ vérifiant $u_t = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\mathrm{div}(u_t) = -\mathrm{div}(w_t)$ dans Ω. Ainsi, le champ à divergence nulle $v_t := u_t + w_t$ appartient à $C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ et coïncide avec w_t sur $\partial\Omega$. On résout finalement

$$\dot{s}_t\left(x\right) = v_t\left(s_t\left(x\right)\right) \quad \text{et} \quad s_0\left(x\right) = x.$$

On a bien $\det\left(\nabla s_t\right) \equiv 1$ et, par unicité du flot, $s_t\left(x\right) = \nabla\varphi_t\left(x\right)$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Donc, en particulier, $s = s_1$ a toutes les propriétés souhaitées. ■

Grâce aux considérations précédentes on peut maintenant déduire une nouvelle démonstration du théorème de Dacorogna-Moser [4] (cf. aussi [3]).

Théorème 4 *Soit $r \geq 0$ un entier, $0 < \alpha < 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné uniformément convexe et de bord $C^{r+2,\alpha}$. Soit $f \in C^{r,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que $f > 0$ dans $\overline{\Omega}$ et $\int_\Omega f = \mathrm{mes}\,\Omega$. Alors il existe $u \in \mathrm{Diff}^{r+1,\alpha}\left(\overline{\Omega};\overline{\Omega}\right)$ tel que*

$$\det\left(\nabla u\right) = f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad u = \mathrm{id} \text{ sur } \partial\Omega. \tag{12}$$

Démonstration L'application $u = s \circ \nabla\varphi$ où s résout (11) (cf. Théorème 3) et φ est solution convexe (cf. Théorème 1) de l'équation de Monge-Ampère

$$\det\left(\nabla^2\varphi\right) = f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \nabla\varphi\left(\Omega\right) = \Omega$$

a toutes les propriétés désirées. ■

Indiquons pour finir que l'approche développée dans cette note s'adapte sans peine à l'équation

$$\det\left(\nabla u\right) g(u) = f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad u = \mathrm{id} \,\text{sur}\, \partial\Omega \tag{13}$$

sous les mêmes hypothèses que précédemment et en supposant $\int_\Omega f = \int_\Omega g$, $g \in C^{r,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $g > 0$ on $\overline{\Omega}$. Le théorème 4 s'étend également au cas où le domaine Ω est $C^{r+2,\alpha}$-difféomorphe à un domaine U uniformément convexe et régulier. En effet, notant Φ un $C^{r+2,\alpha}$-difféomorphisme de U sur Ω, $\overline{f}$ et $\overline{g}$ les mesures images de f et g par Φ^{-1}, le théorème 4 permet de résoudre

$$\det\left(\nabla v\right) \overline{g}(v) = \overline{f} \text{ dans } U \quad \text{et} \quad u = \mathrm{id} \,\text{sur}\, \partial U, \tag{14}$$

de sorte que $u := \Phi \circ v \circ \Phi^{-1}$ résout (13).

References

[1] Brenier Y., Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **44** (1991), 375–417.

[2] Caffarelli L., Boundary regularity of maps with convex potentials II, *Ann. of Math.* **144** (1996), 453–496.

[3] Csato G., Dacorogna B. et Kneuss O., *The pullback equation for differential forms*, Birkhaüser, PNLDE Series, New York, **83** (2012).

[4] Dacorogna B. et Moser J., On a partial differential equation involving the Jacobian determinant, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire,* **7** (1990), 1–26.

[5] Gangbo W. et McCann R.J., Shape recognition via Wasserstein distance, *Quart. Appl. Math.* **58** (2000), 705–737.

[6] Gilbarg D. et Trudinger N.S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[7] Loeper G., On the regularity of the polar factorization for time dependent maps, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **22** (2005), 343–374.

[8] Milnor J., On manifolds homeomorphic to the 7−sphere, *Ann. of Math.* **64** (1956), 399–405.

[9] Urbas J., On the second boundary value problem for equations of Monge-Ampère type, *J. Reine Angew. Math.* **487** (1997), 115-124