Bollettino U. M. I.
(6) 4-B (1985), 179-189

Semi-continuité des fonctionnelles avec contraintes du type « $\det \nabla u > 0$ ».

B. Dacorogna - N. Fusco

Sunto. – *Si studia la semicontinuità inferiore rispetto alla convergenza debole di $W^{1,\infty}(\Omega; \boldsymbol{R}^n)$ di funzionali integrali dipendenti da funzioni vettoriali che verificano la condizione di vincolo sul gradiente:* $\det Du > 0$. *Per i funzionali considerati si mostra come l'ipotesi di quasi-convessità di Morrey sia in certi casi necessaria e sufficiente per la semicontinuità inferiore.*

1. – Introduction.

Dans cet article on isole une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle ($u: \Omega \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$, $\nabla u \in \boldsymbol{R}^{n^2}$)

$$I(u, \Omega) = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\, dx \tag{1.1}$$

soit semi-continue inférieurement par rapport aux convergences faibles * dans $W^{1,\infty}(\Omega; \boldsymbol{R}^n)$ (nous abrégerons par s.c.i. *) c'est-à-dire:

$$\liminf_{u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u}} I(u^\nu, \Omega) \geqslant I(\bar{u}, \Omega) \tag{1.2}$$

(où $\overset{*}{\rightharpoonup}$ dénote la convergence faible * dans $W^{1,\infty}(\Omega; \boldsymbol{R}^n)$).

Si la fonction f est continue sur $\Omega \times \boldsymbol{R}^{n^2}$ et ne prend que des valeurs *finies* alors Morrey ([Mo1], [Mo2]) a isolé une telle condition, appelée *quasiconvexité*, i.e.,

Definition. – Une fonction f est quasiconvexe si

$$\int_D f(x_0, F_0 + \nabla\varphi(x))\, dx \geqslant f(x_0, F_0) \operatorname{mes} D \tag{1.3}$$

pour tout domaine borné $D \subset \boldsymbol{R}^n$, pour tout $(x_0, F_0) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^{n^2}$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D; \boldsymbol{R}^n)$.

Le but de cet article est de montrer que la quasiconvexité est encore nécessaire et suffisante pour la s.c.i. * même si f prend des valeurs *infinies*. Le cas qui nous intéresse est quand $f(x, F) = +\infty$ si $\det F \leqslant 0$. En particulier on sait que (1.2) a lieu si f est polyconvexe (c.f. Ball [Ba1]) ou si $f(x, F) = g(x, F) + \chi(\det F)$ avec g quasiconvexe et finie partout et χ la fonction caractéristique de $(0, +\infty)$.

Le fait de considérer des fonctions f comme ci-dessus présente un intérêt en élasticité non-linéaire où une hypothèse naturelle est qu'il faut une énergie infinie pour comprimer des volumes (i.e., $\det \nabla u$) à zéro.

Les hypothèses sous lesquelles nous travaillerons sont les suivantes:

(i) $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ un ouvert borné

(ii) $f\colon \Omega \times \boldsymbol{R}^{n^2} \to \bar{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ est de Carathéodory (i.e., mesurable en x et continue en F pour presque tout x)

$$(*) \qquad \alpha(x) + \beta h(\det F) \leqslant f(x, F) \leqslant \gamma(x) + \delta\big(h(\det F) + |F|^p\big)$$

où $\alpha, \gamma \in L^1(\Omega)$, $\delta \geqslant \beta > 0$, $p \geqslant 1$ et $h\colon \boldsymbol{R} \to [0, +\infty]$ continue avec

$$(1.4) \qquad \begin{cases} 0 \leqslant h(t) < +\infty & \text{si } t > 0 \\ h(t) \to +\infty & \text{si } t \to 0 \\ h(t) = +\infty & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

(iii) $W^{1,\infty}(\Omega; \boldsymbol{R}^n) = \{u \in L^\infty_n(\Omega);\ \nabla u \in L^\infty_{n^2}(\Omega)\}$

$W^{1,\infty}_0(\Omega; \boldsymbol{R}^n) = \{u \in W^{1,\infty}(\Omega; \boldsymbol{R}^n);\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Nous montrerons que sous ces hypothèses, la quasi convexité est nécessaire pour la s.c.i. * et qu'elle est suffisante pour avoir (1.2) pour des suites $\{u^\nu\}$ $(u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u)$ que l'on peut déformer « lentement » à u. On supposera en effet qu'il existe une homotopie $u^\nu(x, t)$ de u^ν à u qui conserve $\det \nabla_x u^\nu(x, t) > 0$ telle que

$$(1.5) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial t} u^\nu(x, t)\right| \leqslant K \|u^\nu - u\|_{L^\infty}.$$

La question de savoir si une telle homotopie existe toujours est un problème ouvert; nous montrerons toutefois dans l'appendice que l'on peut toujours construire une homotopie satisfaisant $\det \nabla_x u^\nu(x, t) > 0$ sans pourtant pouvoir s'assurer de (1.5).

2. – Condition nécessaire.

Nous allons établir, suivant Morrey [Mo1], [Mo2], que la quasiconvexité est une condition nécessaire pour la s.c.i. *. Pour ne pas alourdir les considérations techniques nous considérerons seulement le cas où f ne dépend pas de x.

THÉORÈME 1. – *Si* $f\colon \mathbf{R}^{n^2} \to \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *est continue et satisfait*

$$\alpha + \beta h(\det F) \leqslant f(F) \leqslant \gamma + \delta\big(h(\det F) + |F|^p\big) \tag{2.1}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\delta \geqslant \beta > 0$, $p \geqslant 1$ *et* h *comme dans l'introduction, et si*

$$\liminf_{u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u}} \int_\Omega f\big(\nabla u^\nu(x)\big)\,dx \geqslant \int_\Omega f\big(\nabla \bar{u}(x)\big)\,dx \tag{2.2}$$

alors f *est quasiconvexe.*

DÉMONSTRATION. – On veut montrer que

$$\int_D f(F + \nabla\varphi(x))\,dx \geqslant \int_D f(F)\,dx \tag{2.3}$$

$\forall F \in \mathbf{R}^{n^2}$, $\forall D \subset \mathbf{R}^n$ un domaine borné et $\forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbf{R}^n)$.

Cas 1. Supposons que $\det F \leqslant 0$. Comme

$$\int_D \det(F + \nabla\varphi(x))\,dx = \int_D \det F\,dx \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbf{R}^n) \tag{2.4}$$

alors il existe un ensemble $D^- \subset D$ de mesure positive tel que

$$\det(F + \nabla\varphi(x)) \leqslant 0\,, \qquad x \in D^- \tag{2.5}$$

et donc (2.3) est trivialement satisfaite.

Cas 2. Soit donc $\det F > 0$ et soit $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbf{R}^n)$ on peut alors supposer que $\det(F + \nabla\varphi) > 0$ dans D autrement (2.3) est trivialement vrai. En étendant φ de D à un hypercube H en posant $\varphi \equiv 0$ sur $H - D$, on peut toujours supposer que D est l'hypercube unité de $\mathbf{R}^n$. Etendons φ de D à $\mathbf{R}^n$ par périodicité et remarquons que

$$u^\nu(x) = Fx + \frac{1}{\nu}\varphi(\nu x) \overset{*}{\rightharpoonup} Fx = \bar{u}(x) \qquad W^{1,\infty}(D; \mathbf{R}^n) \tag{2.6}$$

et que

$$(2.7)\qquad I(u^\nu, D) = \int_D f(F + \nabla\varphi(\nu x))\,dx = \frac{1}{\nu^n}\int_{\nu D} f(F + \nabla\varphi(y))\,dy = \int_D f(F + \nabla\varphi(y))\,dy\,.$$

En combinant (2.2) et (2.7) on obtient le résultat. ■

REMARQUES. – (i) Si on suppose que $f\colon \Omega\times \mathbf{R}^{n^2} \to \overline{\mathbf{R}}$ satisfait (*) (c.f. Introduction) et si de plus f vérifie

$$(2.8)\qquad |f(x, F) - f(y, F)| \leqslant \omega(|x - y|)h(\det F) \qquad \text{p.p } x, y \in \Omega$$

où $\omega\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ est continue et telle que $\omega(t) \to 0$ quant $t \to 0$; alors il est facile de voir que Théorème 1 est encore vrai.

(ii) Alors que dans le cas des fonctions f *finies*, on peut trivialement se restreindre dans la définition de la quasiconvexité à des fonctions $\varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n)$, il n'en va pas de même dans le cas où f satisfait (*). En effet Ball ([Ba2]) a montré qu'il existe des fonctions $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^n)$ avec $\det \nabla\varphi \geqslant \delta > 0$ p.p. dans Ω telles qu'il n'existe pas de fonctions $\varphi^\nu \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R}^n)$ avec

$$\begin{cases} \varphi^\nu \to \varphi W^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^n) & 1 \leqslant p < +\infty \\ \det \nabla\varphi^\nu > 0 \text{ dans } \Omega\,. \end{cases}$$

3. – Condition suffisante.

Nous allons maintenant montrer que si l'on fait des restrictions sur les suites $\{u^\nu\}$ considérées, on peut déduire (1.2) de la quasiconvexité

$$(H)\quad \begin{cases} (H1) & u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^n) \\ (H2) & u \in C^1(\Omega; \mathbf{R}^n); \quad \det \nabla u,\ \det \nabla u^\nu \geqslant \delta > 0 \quad \text{p.p dans } \Omega \\ (H3) & \text{Il existe } u^\nu(x, t) \text{ telle que} \\ & \begin{cases} \|u^\nu(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}} \leqslant \alpha & \text{p.p. } t \in (0, 1) \\ \det \nabla_x u^\nu(x, t) \geqslant \alpha\delta > 0\,, & \text{p.p. dans } \Omega\times(0, 1) \text{ (où } \alpha > 0) \\ u^\nu(x, 1) = u^\nu(x) \\ u^\nu(x, 0) = u(x) \\ |(\partial/\partial t)u^\nu(x, t)| \leqslant K\|u^\nu - u\|_{L_n^\infty(\Omega)} & \text{p.p. dans } \Omega\times(0, 1)\,. \end{cases} \end{cases}$$

L'hypothèse (H) appelle quelques remarques complémentaires.

REMARQUES. – (i) L'hypothèse $(H3)$ implique qu'il existe une déformation $u^\nu(x,t)$ de u^ν à u telle que si u^ν et u sont des difféomorphismes proches dans la norme L^∞ alors $u^\nu(x,t)$ est aussi un difféomorphisme qui reste proche de u.

(ii) $(H3)$ est évidemment vérifiée si on a

$$\det(t\nabla u^\nu + (1-t)\nabla u) \geqslant \alpha\delta > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,\ t\in[0,1] \tag{3.1}$$

car alors il suffit de prendre

$$u^\nu(x,t) = t(u^\nu(x) - u(x)) + u(x)\,. \tag{3.2}$$

(iii) En outre la question reste ouverte de savoir si $(H3)$ n'est pas automatiquement satisfaite si on a les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$. En effet, suivant une idée de J. Moser [Ms1] il est possible (c.f. Appendice) de construire une telle déformation $u^\nu(x,t)$ sans toutefois pouvoir vérifier la dernière condition de $(H3)$.

THÉORÈME 2. – *Soit $f\colon \Omega\times \mathbf{R}^{n^2}\to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction de Carathéodory quasi convexe satisfaisant*

$$0\leqslant f(x,F)\leqslant \alpha + \beta(h(\det F) + |F|^p) \tag{3.3}$$

où $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\geqslant 0$, $p\geqslant 1$ et h satisfait les conditions (1.4) *de l'introduction. Si de plus u^ν est u satisfont (H) alors*

$$\varliminf_{\nu\to\infty} I(u^\nu,\Omega) = \varliminf_{\nu\to\infty}\int_\Omega f(x,\nabla u^\nu(x))\,dx \geqslant I(u,\Omega)\,. \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION. – *1ère etape.* Il n'est pas restrictif de supposer que Ω est un cube de côté 1. Soit $k>0$ et soit Ω_i un cube de côté $1/k$ $(1\leqslant i\leqslant k^n)$ tel que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{k^n}\Omega_i (\Omega_i\cap\Omega_j = \emptyset \text{ si } i\neq j)\,.$$

Soit $H_i\subset\Omega_i$ un cube de même centre que Ω_i et de côté $1/k - 1/k^2$ et donc si $H = \cup H_i$,

$$\operatorname{mes}(\Omega - H)\to 0\,,\quad \text{quand } k\to\infty\,. \tag{3.5}$$

Fixons k et définissons $\xi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ avec $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ et

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \\ 1 & \text{si } x \in H_i \end{cases} \tag{3.6}$$

et $\varphi^\nu \in W^{1,\infty}(\Omega; \boldsymbol{R}^n)$ par

$$\varphi^\nu(x) = u^\nu(x, \xi(x)) - u(x) , \tag{3.7}$$

où $u^\nu(x, t)$ est la déformation considérée dans l'hypothèse (H). En choissant ν suffisamment grand et en observant que

$$\nabla\varphi^\nu(x) = \nabla_x u^\nu(x, \xi(x)) + \operatorname{grad}\xi(x) \frac{\partial}{\partial t} u^\nu(x, \xi(x)) - \nabla u(x) , \tag{3.8}$$

en utilisant (H) on a qu'il existe $\alpha > 0$ indépendant de ν tel que

$$\begin{cases} \|\varphi^\nu\|_{W^{1,\infty}} \leqslant \alpha \|u^\nu\|_{W^{1,\infty}} \\ \det(\nabla u + \nabla\varphi^\nu) \geqslant \alpha\delta > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_i . \end{cases} \tag{3.9}$$

2ème étape. Soit $\varepsilon > 0$, alors comme f est de Carathéodory ([ET1], Chap. VIII), il existe $K_\varepsilon \subset \Omega$ compact tel que

$$\operatorname{mes}(\Omega - K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon , \tag{3.10}$$

$$f \text{ continue sur } K_\varepsilon \times \boldsymbol{R}^{n^2} . \tag{3.11}$$

Définissons

$$(\nabla u)_k(x) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_i} \int_{\Omega_i} \nabla u(y)\, dy , \quad \text{si } x \in \Omega_i , \tag{3.12}$$

alors comme $u \in C^1(\Omega; \boldsymbol{R}^n)$

$$(\nabla u)_k \to \nabla u \text{ uniformément quand } k \to \infty . \tag{3.13}$$

Fixons $x_i \in \Omega_i \cap K_\varepsilon$ (si $\Omega_i \cap K_\varepsilon \neq \emptyset$). On a trivialement

$$\begin{aligned} I(u^\nu, \Omega) - I(u, \Omega) &= \\ &= I(u^\nu, \Omega) - I(u + \varphi^\nu, \Omega) + I(u + \varphi^\nu, \Omega) - I(u, \Omega) . \end{aligned} \tag{3.14}$$

En combinant (3.3), (3.5)-(3.9), on a que pour k suffisamment grand

$$I(u^\nu, \Omega) - I(u + \varphi^\nu, \Omega) \geqslant -\varepsilon , \tag{3.15}$$

et donc trivialement on obtient

$$
\begin{aligned}
(3.16)\qquad I(u^\nu, \Omega) - I(u, \Omega) &\geqslant -\varepsilon + I(u+\varphi^\nu, K_\varepsilon) - I(u, \Omega)\\
&\geqslant -\varepsilon + \sum_{i=1}^{k^n} \int\limits_{\Omega_i \cap K_\varepsilon} [f(x, \nabla u + \nabla\varphi^\nu) - \\
&\qquad\qquad - f(x_i, (\nabla u)_k + \nabla\varphi^\nu)]\, dx\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k^n} \int\limits_{\Omega_i} [f(x_i, (\nabla u)_k + \nabla\varphi^\nu)) - \\
&\qquad\qquad - f(x_i, (\nabla u)_k)]\, dx\\
&\quad - \sum_{i=1}^{k^n} \int\limits_{\Omega_i - K_\varepsilon} [f(x_i, (\nabla u)_k + \nabla\varphi^\nu) - \\
&\qquad\qquad - f(x_i, (\nabla u)_k)]\, dx\\
&\quad + \sum_{i=1}^{k^n} \int\limits_{\Omega_i \cap K_\varepsilon} [f(x_i, (\nabla u)_k) - f(x, \nabla u)]\, dx\\
&\quad + \int\limits_{\Omega - K_\varepsilon} f(x, \nabla u)\, dx\\
&\geqslant -\varepsilon + a_k^\nu + b_k^\nu - c_k^\nu + d_k + e\,.
\end{aligned}
$$

En remarquant que

(i) $a_k^\nu \to 0$ quand $k \to \infty$, uniformément par rapport à ν (en utilisant (3.3), (3.7)-(3.9), la continuité uniforme de f sur les ensembles bornés de $K_\varepsilon \times \boldsymbol{R}^{n^2}$, (3.13) et le théorème de Lebesgue),

(ii) $b_k^\nu \geqslant 0$ car f est quasiconvexe,

(iii) $c_k^\nu \geqslant -\varepsilon$ si k est suffisamment grand,

(iv) $d_k \to 0$ quand $k \to \infty$, on obtient en passant à la limite sur ν, puis sur k

$$
(3.17)\qquad \varliminf_{\nu\to\infty} I(u^\nu, \Omega) - I(u, \Omega) \geqslant -2\varepsilon + \int\limits_{\Omega - K_\varepsilon} f(x, \nabla u(x))\, dx\,.
$$

ε étant arbitraire, on obtient le résultat. ■

REMARQUE. – Il est facile de voir que si dans (3.3) on remplace $\alpha \in \boldsymbol{R}$ par $\alpha(x)$ où $\alpha \in L^1(\Omega)$, le théorème reste vrai.

4. - Appendice.

Nous allons montrer maintenant que dans les hypothèses (H) du paragraphe précédent on peut effectivement construire des deformations $u^\nu(x,t)$ satisfaisant les conditions de $(H3)$ exceptée la dernière. Pour cela nous suivons une idée de J. Moser ([Ms1]).

PROPOSITION 3. - *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné de frontière lipschitzienne, soit*

$$(4.1)\qquad \begin{cases} u^\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u\,, & W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^n) \\ u \in C^1(\Omega; \mathbf{R}^n)\,, & u \text{ inversible et } \det \nabla u \geqslant \delta > 0 \\ u^\nu \in C^1(\Omega; \mathbf{R}^n)\,, & u^\nu \text{ inversible et } \det \nabla u^\nu \geqslant \delta > 0 \end{cases}$$

alors il existe $u^\nu(x,t) \in C^1(\Omega \times (0,1); \mathbf{R}^n)$ inversible et $\alpha > 0$ indépendant de ν tels que

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \|u^\nu(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}} \leqslant \alpha \\ \det \nabla_x u^\nu(x,t) \geqslant \alpha\delta > 0 \\ u^\nu(x,1) = u^\nu(x) \\ u^\nu(x,0) = u(x)\,. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. - Comme u est inversible on peut toujours se ramener au cas où $u = \mathrm{id}$. De plus on peut supposer que $0 \in \Omega$ et que $u^\nu(0) = 0$ (autrement en choisissant $v^\nu(x) = u^\nu(x) - u^\nu(0)$ et en appliquant la Proposition on a le résultat).

1ère étape. Soit $\lambda_\nu > 0$ et soit

$$(4.3)\qquad u^\nu_{\lambda_\nu}(x) = \frac{1}{\lambda_\nu} u^\nu(\lambda_\nu x) = \nabla u^\nu(0)\cdot x + r^\nu(x,\lambda_\nu)\,.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $\lambda_\nu > 0$ suffisamment petit pour que

$$(4.4)\qquad \|r^\nu(\cdot,\lambda_\nu)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leqslant \varepsilon\,.$$

2ème étape: Ayant fixé λ_ν comme ci-dessus, définissons pour $t \in [\frac{2}{3}, 1]$

$$(4.5)\qquad u^\nu(x,t) = \frac{1}{\lambda_\nu^{3(1-t)}} u^\nu(\lambda_\nu^{3(1-t)} x)\,.$$

et observons que

$$\nabla_x u^\nu(x,t) = \nabla u^\nu(\lambda_\nu^{3(1-t)}x)\,,$$

$u^\nu(x,t)$ est trivialement inversible et que

$$(4.6)\qquad \begin{cases} \|\nabla_x u^\nu(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\nabla u^\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \det \nabla_x u^\nu(x,t) \geqslant \delta > 0 \\ u^\nu(x,1) = u^\nu(x) \\ u^\nu(x,\frac{2}{3}) = u^\nu_{\lambda_\nu}(x) \end{cases}$$

3ème étape. Pour $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ on définit

$$(4.7)\qquad u^\nu(x,t) = \nabla u^\nu(0)\cdot x + (3t-1)r^\nu(x,\lambda_\nu)\,.$$

comme

$$\nabla_x u(x,t) = \nabla u^\nu(0) + (3t-1)\nabla_x r^\nu(x,\lambda_\nu)$$

on déduit de (4.4) que $u^\nu(x,t) \in C^1(\Omega\times(\frac{1}{3},\frac{2}{3});\boldsymbol{R}^n)$ est inversible et que

$$(4.8)\qquad \begin{cases} \|\nabla_k u^\nu(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \alpha \\ \det \nabla_x u^\nu(x,t) \geqslant \alpha\delta > 0 \\ u^\nu(x,\frac{2}{3}) = u^\nu_{\lambda_\nu}(x) \\ u^\nu(x,\frac{1}{3}) = \nabla u^\nu(0)\cdot x\,. \end{cases}$$

4ème étape. Finalement décomposons

$$(4.9)\qquad \nabla u^\nu(0) = P^\nu R^\nu$$

où P^ν est une matrice définie positive et R^ν est une rotation. Décomposons R^ν sous sa forme de Jordan.

$$(4.10)\qquad R^\nu = T^\nu S^\nu_n (T^\nu)^{-1}$$

où

$$(4.11)\qquad S^\nu_n = \begin{pmatrix} J^\nu_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & J^\nu_{[(n-1)/2]} & \\ 0 & & & J^\nu_{[(n+1)/2]} \end{pmatrix}$$

et où

$$J_k^\nu = \begin{pmatrix} \cos\theta_k^\nu & -\sin\theta_k^\nu \\ \sin\theta_k^\nu & \cos\theta_k^\nu \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

pour tous $1 \leqslant k \leqslant [(n+1)/2]$ si n est pair et pour tous $1 \leqslant k \leqslant [(n-1)/2]$ si n est impair et dans ce cas là $J_{[(n+1)/2]} = 1$.

De plus dans (4.10) on peut toujours supposer que $\|T^\nu\|$ et $\|(T^\nu)^{-1}\|$ sont bornées indépendamment de ν. Définissons maintenant pour $t \in [0, \frac{1}{3}]$

$$J_{k,t}^\nu = \begin{pmatrix} \cos 3t\theta_k^\nu & -\sin 3t\theta_k^\nu \\ \sin 3t_k^\nu & \cos 3t\theta_k^\nu \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Si J_k^ν est comme dans (4.12) et si n est impair alors

$$J_{[(n+1)/2],t}^\nu = 1\,. \tag{4.13}$$

Et enfin définissons $S_{n,t}$ de manière naturelle et

$$R_t^\nu = T^\nu S_{n,t}^\nu (T^\nu)^{-1}\,. \tag{4.14}$$

Remarquons aussi que comme P^ν est définie positive on a que

$$\det\big(3tP^\nu + (1-3t)I\big) \geqslant \alpha\delta > 0 \tag{4.15}$$

$\Big($car

$$3tP^\nu + (1-3t)I = A^\nu\big(3t\Delta^\nu + (1-3t)I\big)(A^\nu)^{-1}$$

où Δ^ν est une matrice diagonale avec tous ses coefficients positifs$\Big)$.

Définissons finalement pour $t \in [0, \frac{1}{3}]$

$$u^\nu(x,t) = \big[\big(3tP^\nu + (1-3t)I\big)R_t^\nu\big]\cdot x \tag{4.16}$$

où R_t^ν est défini par (4.14). On a alors

$$\begin{cases} \|\nabla_x u^\nu(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \alpha \\ \det \nabla_x u^\nu(x,t) = \det\big(3tP^\nu + (1-3t)I\big) \geqslant \alpha\delta \\ u^\nu(x, \frac{1}{3}) = \nabla u^\nu(0)\cdot x \\ u^\nu(x, 0) = x\,. \end{cases}$$

Remarquons enfin que dans la démonstration on peut toujours s'arranger pout avoir $u^\nu \in C^1(\Omega \times (0,1); \mathbf{R}^n)$ en $t = \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. ■

REMERCIEMENTS. – Nous aimerions remercier J. Moser pour son aide décisive concernant l'Appendice.

Des résultats récents de M. G. Brin et D. Pixton (« Slow isotopies », à paraître) semblent indiquer que sous les hypothèses de la Proposition 3, on peut effectivement construire des u^ν qui satisfont toutes les hypothèses de $(H3)$, y compris donc

$$\left|\frac{\partial u^\nu}{\partial t}(x, t)\right| \leqq K\|u^\nu - u\|_{L^\infty}.$$

REFERENCES

[Ba1] J. M. BALL, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **63** (1977), 337-403.

[Ba2] J. M. BALL, *Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **88** (1981), 315-328.

[ET1] I. EKELAND - R. TÉMAM, *Analyse convexe et problèmes variationels*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1976.

[Mo1] C. B. MORREY, *Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals*, Pacific J. Math., **2** (1952), 25-53.

[Mo2] C. B. MORREY, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Spinger-Verlag, Berlin, 1966.

[Ms1] J. MOSER, Communication privée (1982).

B. Dacorogna: Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique Féderale de Lausanne - 1015 Lausanne, Suisse

N. Fusco: Istituto di Matematica, Università di Napoli

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 27 giugno 1983