

Analyse avancée pour ingénieurs

B. Dacorogna et C. Tanteri

Table des matières

I	Analyse vectorielle	1
1	Les opérateurs différentiels	3
1.1	Définitions et résultats théoriques	3
1.2	Exemples	5
1.3	Exercices	6
2	Intégrales curvilignes	7
2.1	Définitions et résultats théoriques	7
2.2	Exemples	8
2.3	Exercices	9
3	Champs qui dérivent d'un potentiel	11
3.1	Définitions et résultats théoriques	11
3.2	Exemples	12
3.3	Exercices	15
4	Théorème de Green	17
4.1	Définitions et résultats théoriques	17
4.2	Exemples	18
4.3	Exercices	19
5	Intégrales de surfaces	21
5.1	Définitions et résultats théoriques	21
5.2	Exemples	22
5.3	Exercices	24
6	Le théorème de la divergence	25
6.1	Définitions et résultats théoriques	25
6.2	Exemples	26
6.3	Exercices	28
7	Le théorème de Stokes	31
7.1	Définitions et résultats théoriques	31
7.2	Exemples	32
7.3	Exercices	34
8	Appendice	37
8.1	Notations et notions de topologie	37
8.2	Notations et notions d'espaces de fonctions	39
8.3	Courbes	40
8.4	Surfaces	42
8.5	Changements de variables	51

II	Analyse complexe	55
9	Fonctions holomorphes	57
9.1	Définitions et résultats théoriques	57
9.2	Exemples	58
9.3	Exercices	60
10	Intégration complexe	63
10.1	Définition et résultats théoriques	63
10.2	Exemples	64
10.3	Exercices	65
11	Séries de Laurent	69
11.1	Définitions et résultats théoriques	69
11.2	Exemples	71
11.3	Exercices	72
12	Théorème des résidus et applications	75
12.1	Partie I	75
12.1.1	Définitions et résultats théoriques	75
12.1.2	Exemples	75
12.2	Partie II : Calcul d'intégrales réelles	76
12.3	Exercices	79
13	Applications conformes	83
13.1	Définitions et résultats théoriques	83
13.2	Exemples	84
13.3	Exercices	85
III	Analyse de Fourier	87
14	Séries de Fourier	89
14.1	Définitions et résultats théoriques	89
14.2	Exemples	92
14.3	Exercices	94
15	Transformées de Fourier	99
15.1	Définitions et résultats théoriques	99
15.2	Exemples	101
15.3	Exercices	102
16	Transformées de Laplace	105
16.1	Définitions et résultats théoriques	105
16.2	Exemples	107
16.3	Exercices	110
17	Applications : EDO	113
17.1	Le problème de Cauchy	113
17.2	Problème de Sturm-Liouville	115
17.3	Autres exemples	117
17.4	Exercices	119

18 Applications : EDP	121
18.1 Equation de la chaleur	121
18.2 Equation des ondes	125
18.3 Equation de Laplace dans un rectangle	126
18.4 Equation de Laplace dans un disque	129
18.5 Le cas d'un domaine simplement connexe	131
18.6 Exercices	134
IV Corrigés des exercices	139
19 Opérateurs différentiels : corrigés	141
20 Intégrales curvilignes : corrigés	147
21 Champs dérivants d'un potentiel : corrigés	151
22 Théorème de Green : corrigés	157
23 Intégrales de surfaces : corrigés	167
24 Le théorème de la divergence : corrigés	171
25 Théorème de Stokes : corrigés	185
26 Fonctions holomorphes : corrigés	197
27 Intégration complexe : corrigés	203
28 Séries de Laurent : corrigés	209
29 Théorème des résidus : corrigés	219
30 Applications conformes : corrigés	229
31 Séries de Fourier : corrigés	239
32 Transformées de Fourier : corrigés	249
33 Transformées de Laplace : corrigés	253
34 EDO : corrigés	261
35 EDP : corrigés	271

Préface

Ce livre s'adresse en premier lieu à des étudiants ingénieurs qui ont suivi un cours d'analyse de base (calcul différentiel et intégral). Il correspond à la deuxième année du cursus (à raison de deux heures de cours et deux heures d'exercices par semaines) de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Nous pensons qu'il peut aussi être utile aux étudiants en mathématiques ou en physique comme complément à un cours plus théorique.

Il existe d'excellents livres sur les sujets traités ici (certains, que nous aimons particulièrement, sont mentionnés dans notre bibliographie). Notre approche est toutefois différente. Comme notre ouvrage s'adresse avant tout à des étudiants ingénieurs nous avons privilégié l'apprentissage de la matière par les exemples et les exercices. En effet nous avons réduit la partie théorique à une sorte d'aide mémoire, tout en essayant de ne pas sacrifier la précision et la rigueur des énoncés des théorèmes et des définitions. Par contre nous avons développé avec beaucoup de détails les exemples et les corrections des exercices. Pour rendre l'accès plus aisé aux étudiants ingénieurs nous avons surtout insisté sur l'applicabilité des méthodes, parfois au dépens d'un développement mathématique rigoureux (particulièrement en ce qui concerne l'analyse vectorielle et les problèmes de convergence dans l'analyse de Fourier). Toutefois les exemples et les exercices ont été choisis pour qu'un tel développement puisse se faire sans trop de difficultés, par un étudiant motivé. Nous espérons donc que ce choix d'organisation de la matière satisfaira à deux besoins de nature différente. En premier lieu il devrait permettre à l'étudiant de se préparer efficacement aux examens. Mais il devrait aussi s'avérer utile, plus tard, pour retrouver rapidement et précisément les résultats théoriques importants.

L'organisation générale du livre est la suivante. Les trois premières parties (analyse vectorielle, analyse complexe et analyse de Fourier), qui sont divisées en chapitres, représentent la partie théorique. Elles sont essentiellement indépendantes les unes des autres, à part quelques exceptions mineures. Enfin dans une quatrième partie tous les exercices proposés précédemment sont corrigés en détails. Les chapitres (à l'exception des deux derniers consacrés aux applications aux équations différentielles et de l'appendice) sont organisés comme suit :

1) Les définitions et les théorèmes sont énoncés avec précision mais sans commentaires. Par ailleurs nous mentionnons les pages exactes des livres de notre bibliographie où le lecteur intéressé pourra poursuivre son étude.

2) Des exemples significatifs sont ensuite discutés en détails.

3) Enfin de nombreux exercices sont proposés (et comme déjà dit, ils sont corrigés intégralement dans la quatrième partie de notre livre) et sont divisés en deux catégories. La première, la plus importante par le nombre, permettra à l'étudiant d'assimiler la technique et les concepts présentés dans le chapitre. La seconde (les exercices correspondants étant identifiés par un astérisque) présente des développements théoriques importants qui peuvent permettre aux étudiants les plus motivés d'approfondir le sujet.

Nous aimerions maintenant faire quelques commentaires sur la bibliographie. Nous avons sélectionné deux types de livres.

1) Nous avons choisi comme livres de références mathématiques les ouvrages suivants dont nous avons aimé la rigueur, la clarté et la profondeur :

- pour l'analyse vectorielle et les séries de Fourier le livre de M.H. Protter et C.B. Morrey ainsi que celui plus avancé de W. Fleming ;
- pour l'analyse complexe celui de L.V. Ahlfors qui est un grand classique ;
- pour la transformée de Laplace et de Fourier le livre de D.V. Widder ;
- enfin les trois volumes de S.D. Chatterji couvrent le domaine entier du présent ouvrage.

2) En ce qui concerne les livres plus spécifiquement pour ingénieurs nous aimons particulièrement le livre de E. Kreyszig. Les deux ouvrages de K. Arbenz et A. Wohlhauser sont aussi, par leur concision, attrayants.

Enfin nous voudrions terminer cette brève préface en adressant nos plus vifs remerciements à tous ceux qui nous ont aidé à la réalisation de notre livre. En premier lieu nous pensons à tous les étudiants qui ont suivi notre cours et qui par leurs commentaires nous ont permis d'améliorer sensiblement diverses parties du présent livre. Par ailleurs les assistants en charge des exercices nous ont apporté une aide considérable, notamment H. Gebran. Nos collègues qui enseignent la même matière à d'autres sections d'ingénieurs nous ont fait plusieurs suggestions intéressantes. D'autre part L. Rollaz s'est occupé, toujours avec le sourire et avec efficacité, de tous les dessins du présent ouvrage. De même K.D. Semmler nous a aidé de manière significative et multiforme ; tout d'abord dans la gestion du fichier latex. Ses explications concernant la représentation d'objets tridimensionnels dans le plan et les problèmes de perspective nous ont été particulièrement utiles et instructives. Enfin Mme. M.F. De Carmine, comme à son habitude, a assuré, avec efficacité, une partie de la dactylographie du présent manuscrit.