Exercice 1 (cf. Exercice 3.5.4). Soient $u, v \in W^{1,p}\left(\Omega; \mathbb{R}^2\right)$, avec $p \geq 2$. Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ (dépendant seulement de p) tel que

$$\|\det \nabla u - \det \nabla v\|_{L^{p/2}} \leq \gamma \left(\|\nabla u\|_{L^p} + \|\nabla v\|_{L^p}\right) \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p} \ .$$

Exercice 2 (cf. Exercice 3.6.1). Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et

$$(P) \quad \inf \left\{ I\left(u\right) = \int_0^1 f\left(u'\left(x\right)\right) dx \right\} = m$$

où $X = \left\{u \in W^{1,\infty}\left(0,1\right) : u\left(0\right) = \alpha,\ u\left(1\right) = \beta\right\}$.

(i) Supposons qu'il existe $\lambda \in [0,1]$, $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} \beta - \alpha = \lambda\, a + (1-\lambda)\, b \\ f^{**}\left(\beta - \alpha\right) = \lambda\, f\left(a\right) + \left(1-\lambda\right) f\left(b\right) \end{array} \right.$$

où f^{**} est l'enveloppe convexe de f (définie au cours). Montrer que

$$\overline{u}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} ax + \alpha & \text{si } x \in [0, \lambda] \\ b(x-1) + \beta & \text{si } x \in [\lambda, 1] \end{array} \right.$$

est une solution de (P) indépendamment du fait que f est convexe ou non. (On peut remarquer que si f est convexe, l'hypothèse ci-dessus est toujours vraie; il suffit de prendre $\lambda = 1/2$ et $a = b = \beta - \alpha$.)

(ii) Le résultat s'applique-t-il à $f\left(\xi\right) = e^{-\xi^2}$ (voir cet exemple vu au cours) et $\alpha = \beta = 0$?

(iii) Qu'arrive-t-il quand $f\left(\xi\right) = \left(\xi^2 - 1\right)^2$?

Exercice 3 (cf. Exercice 4.2.2). Soient $\overline{u}\left(x\right) = \frac{7}{12}\left|x\right|^{12/7}$,

$$f_1\left(x, u, \xi\right) = \frac{1}{8}\,\xi^8 + 5\,x^4\,u \quad \text{et} \quad f_2\left(x, u, \xi\right) = f_2\left(x, \xi\right) = \frac{1}{8}\,\xi^8 - x^5\,\xi$$

$$(P_i) \quad \inf_{u \in X} \left\{ I_i\left(u\right) = \int_{-1}^1 f_i\left(x, u\left(x\right), u'\left(x\right)\right) dx \right\}, \quad i = 1, 2$$

$$X = \left\{ u \in W^{1,8}\left(-1,1\right) : u\left(-1\right) = u\left(1\right) = \frac{7}{12} \right\}.$$

Montrer que $\overline{u} \in C^1\left([-1,1]\right)$ est le seul minimiseur de (P_1) et de (P_2), mais que $\overline{u} \notin C^2\left([-1,1]\right)$, bien que $f_1, f_2 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Exercice 4 (cf. Exercice 4.2.3). Soient $p > 2q > 2$ and

$$f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p + \frac{\lambda}{q}|u|^q \quad \text{où } \lambda = \frac{q\,p^{q-1}(p-1)}{(p-q)^q}$$

$$\overline{u}(x) = \frac{p-q}{p}|x|^{p/(p-q)}$$

(noter que si, par exemple, $p = 6$ et $q = 2$, alors $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$).

(i) Montrer que $\overline{u} \in C^1([-1,1])$ mais $\overline{u} \notin C^2([-1,1])$.

(ii) Trouver des exemples de valeurs pour p et q de telle sorte que

$$|\overline{u}'|^{p-2}\,\overline{u}', |\overline{u}|^{q-2}\,\overline{u} \in C^\infty([-1,1]),$$

alors que $\overline{u} \notin C^2([-1,1])$.

(iii) Montrer que $\overline{u}$ est le seul minimiseur de

$$(P) \qquad \inf_{u \in W^{1,p}(-1,1)} \left\{ I(u) = \int_{-1}^{1} f(u(x), u'(x))\,dx : u(-1) = u(1) = \frac{p-q}{p} \right\}.$$