Exercice 1 (cf. Exercice 3.5.1). Soit $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Montrer que les fonctions

$$f_1(\xi) = (\det \xi)^2 \quad \text{et} \quad f_2(\xi) = |\xi|^4 + 16(\det \xi)^2$$

ne sont pas convexes.

Exercice 2 (cf. Exercice 3.5.7). Soit $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *polyconvexe*, c'est à dire, il existe une fonction

$$F : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F = F(\xi, \delta),$$

convexe telle que

$$f(\xi) = F(\xi, \det \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(i) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné Lipschitzien. Montrer que f est *quasiconvexe*, c'est à dire

$$\int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi(x))\, dx \geq f(\xi) \operatorname{meas} \Omega$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$.

Suggestion. On pourra utiliser le fait (cf. Exercice 3.5.2) que si $p \geq 2$ et $u \in v + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, alors

$$\iint_\Omega \det \nabla u(x)\, dx = \iint_\Omega \det \nabla v(x)\, dx.$$

(ii) Montrer que f est *rang un convexe*, c'est à dire que la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(t) = f(\xi + t\,\lambda)$$

est convexe pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tel que $\det \lambda = 0$.

(iii) Montrer que si $f \in C^2(\mathbb{R}^{2\times 2})$, alors elle satisfait la condition de *Legendre-Hadamard condition*, à savoir

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_i^\alpha \partial \xi_j^\beta}\, a_i\, a_j\, b^\alpha\, b^\beta \geq 0$$

pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et tout $b = (b^1, b^2) \in \mathbb{R}^2$.

Dans l'exercice suivant on aura besoin de

Définition Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert $u_\nu, u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On dit que u_ν *converge au sens des distributions* vers u, et on écrit $u_\nu \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, si

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu\, \varphi = \int_\Omega u\, \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Remarque Si Ω est borné, alors

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^\infty \quad \Rightarrow \quad u_\nu \rightharpoonup u \text{ dans } L^1 \quad \Rightarrow \quad u_\nu \rightharpoonup u \text{ dans } \mathcal{D}'.$$

Exercice 3 (cf. Exercice 3.5.5). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné Lipschitzien. On a vu au Lemme 3.23 que, si $p > 2$, alors

$$u^\nu \rightharpoonup u \text{ dans } W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \det \nabla u^\nu \rightharpoonup \det \nabla u \text{ dans } L^{p/2}\left(\Omega\right).$$

(i) Montrer que le résultat est faux, en général, si $p = 2$. Considérer, par exemple $\Omega = (0,1)^2$ et

$$u^\nu\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\left(1 - x_2\right)^\nu \left(\sin\left(\nu x_1\right), \cos\left(\nu x_1\right)\right).$$

(ii) Montrer, à l'aide du Théorème de Rellich (cf. Théorème 1.45) et de l'exercice 2 de la srie 5 (cf. Exercice 1.3.3) que, si $u^\nu, u \in C^2\left(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2\right)$ et $p > 4/3$ (donc, en particulier, quand $p = 2$), alors

$$u^\nu \rightharpoonup u \text{ dans } W^{1,p}\left(\Omega;\mathbb{R}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \det \nabla u^\nu \rightharpoonup \det \nabla u \text{ dans } \mathcal{D}'\left(\Omega\right).$$

Remarque Le résultat est, par contre faux, en général, si $p \leq 4/3$.