Calcul des variations **été 2017** **SÉRIE 7**

Exercice 1 (cf. Exercice 3.4.1). Montrer, à l'aide du théorème d'immersion de Sobolev, que le Théorème 3.11 reste valable si on affaiblit, de manière appropriée, l'hypothèse (H_3), i.e. il existe une constante $\beta \geq 0$ telle que pour tout $(x, u, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$|f_u(x, u, \xi)|, \ |f_\xi(x, u, \xi)| \leq \beta \left(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right).$$

Considérer les cas: $p > n$, $p = n$ et $n > p \geq 1$ séparément.

Exercice 2 (cf. Exercice 3.4.2). Comme dans l'exercice précédent, trouver des conditions sur g (dépendantes de p et de n) qui affaiblissent l'hypothèse (H_3) dans le cas où

$$f(x, u, \xi) = \frac{1}{p} |\xi|^p + g(x, u).$$

Exercice 3 (cf. Exercice 3.4.3). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont le bord est C^1, $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $\lambda > 0$. Soit le problème

$$\inf \left\{ I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - h\, u \right] + \frac{\lambda}{2} \int_{\partial\Omega} |u|^2 : u \in C^2(\overline{\Omega}) \right\}.$$

En supposant qu'il existe une solution $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$, trouver l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par le minimiseur.

Exercice 4 (cf. Exercice 3.5.3). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné Lipschitzien, $u_0 \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ et

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \iint_\Omega \det \nabla u(x)\, dx : u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2) \right\} = m.$$

Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange associée à (P).