Exercice 1 (cf. Exercice 3.2.1). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné de bord Lipschitzien et $h \in L^2(\Omega)$. Montrer que

$$(P) \quad \inf\left\{ I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - h(x) u(x) \right] dx : u \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\} = m$$

admet une solution unique $\overline{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ qui satisfait, en outre,

$$\int_\Omega \langle \nabla \overline{u}(x) ; \nabla \varphi(x) \rangle \, dx = \int_\Omega h(x) \varphi(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) .$$

Exercice 2 (cf. Exercice 3.2.2). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe borné de bord Lipschitzien, $h \in L^2(\Omega)$ et

$$X = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega u = 0 \right\}.$$

(i) Montrer que le problème de Neumann

$$(N) \quad \inf\left\{ I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - h(x) u(x) \right] dx : u \in X \right\} = m$$

a une et une seule solution $\overline{u} \in X$.

(ii) Ecrire la forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par $\overline{u}$.

(iii) Si, de plus $\overline{u} \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et $h \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, écrire (la forme forte de) l'équation d'Euler-Lagrange.

Exercice 3 (cf. Exercice 3.3.2). Montrer le Théorème 3.3 quand

$$f(x, u, \xi) = g(x, u) + h(x, \xi)$$

où $g \in C^0\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$, $g \geq 0$ et $h \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n\right)$ est tel que

$$\xi \to h(x, \xi) \quad \text{est convexe } \forall x \in \overline{\Omega},$$

et il existe $p > 1$ et $\alpha_1 > 0$, $\beta, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$h(x, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_3 , \quad \forall (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n$$

$$|h_\xi(x, \xi)| \leq \beta \left(1 + |\xi|^{p-1}\right), \quad \forall (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n.$$