**Exercice 1** (cf. Théorème 1.22). Soient $1 < p < \infty$ et $u \in L^p(0,1)$ étendue par périodicité à $\mathbb{R}$. Soient

$$u_\nu(x) = u(\nu x) \quad \text{et} \quad \overline{u} = \int_0^1 u(x)\,dx.$$

Montrer qu'alors $u_\nu \rightharpoonup \overline{u}$ dans $L^p(0,1)$.

**Exercice 2** (cf. Exercice 1.3.3). **(i)** Montrer que si $1 \leq p < \infty$, alors

$$\left.\begin{array}{l} u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^p \\ v_\nu \to v \quad \text{dans } L^{p'} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_\nu v_\nu \rightharpoonup uv \quad \text{dans } L^1.$$

Trouver un exemple montrant que le résultat est faux si on remplace $v_\nu \to v$ dans $L^{p'}$ par $v_\nu \rightharpoonup v$ dans $L^{p'}$.

**(ii)** Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2 \\ u_\nu^2 \rightharpoonup u^2 \quad \text{dans } L^1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_\nu \to u \quad \text{dans } L^2.$$

**Exercice 3** (cf. Exercice 1.3.4). Soient $1 \leq p < \infty$ et $u_\nu \rightharpoonup u$ dans $L^p(\Omega)$, montrer (en invoquant l'Exemple 1.53) que

$$\|u\|_{L^p} \leq \liminf_{\nu \to \infty} \|u_\nu\|_{L^p} .$$

**Exercice 4** (cf. Exercice 1.4.4 qui est le Corollaire 1.47 en dimension $n = 1$). Montrer que si $1 < p < \infty$, alors

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ dans } W^{1,p}(a,b) \quad \Rightarrow \quad u_\nu \to u \text{ dans } L^p(a,b)$$

et même $u_\nu \to u$ dans $L^\infty(a,b)$.

**Exercice 5** (cf. Exercice 1.4.5). Montrer que si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, $1 < p < \infty$ et s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq \gamma$$

alors il existe une sous suite $\{u_{\nu_i}\}$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$u_{\nu_i} \rightharpoonup u \quad \text{dans } W^{1,p}.$$

**Exercice 6** (cf. Exercice 1.4.11). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord Lipschitzien, $1 < p < \infty$ et $u^\nu \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tels que

$$u^\nu \rightharpoonup u \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega) \,.$$

Deduire que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

*Indication :* Thm 1.41.