Exercice 1 (cf. Exercice 2.3.2). Soient

$$f(x, u, \xi) = f(u, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - u$$

Montrer que $u \equiv 1$ est solution de la deuxième forme de l'équation de Euler-Lagrange mais pas de sa forme classique.

Exercice 2 (cf. Exercice 3.3.4 pour un cadre plus général). Soit

$$f(x, u, \xi) = g(x, u) + h(x, \xi)$$

avec $u \to g(x, u)$, $\xi \to h(x, \xi)$ convexes et au moins une strictement convexe. Montrer que l'unicité dans le Théorème 2.1 (plus tard cela pourra être généralisé dans le Théorème 3.3) est conservée.

Exercice 3. Montrer que l'équation de Euler-Lagrange associée à

$$J(u, v) = \int_a^b [u'(x)\, v(x) - H(x, u(x), v(x))]\, dx$$

est donnée par

$$(H) \quad \begin{cases} u'(x) = H_v(x, u(x), v(x)) \\ v'(x) = -H_u(x, u(x), v(x)). \end{cases}$$

Exercice 4 (cf. Exemple 2.17). Soit $f(x, u, \xi) = f(u, \xi)$ avec f satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.11.

1) Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange correspondante ainsi que la deuxième forme de cette équation.

2) Ecrire le système Hamiltonien correspondant et montrer que si (u, v) sont des solutions du système Hamiltonien, alors

$$\frac{d}{dx}[H(u(x), v(x))] \equiv 0.$$

Exercice 5 (cf. Théorème 2.22 et Exemple 2.24). *(i)* Soit $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Soient

$$(P) \quad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \right\} = m$$

où $X = \left\{u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\right\}$ et l'équation d'Euler-Lagrange associée

$$(E) \qquad \frac{d}{dx}\left[f_\xi\left(x,u,u'\right)\right] = f_u\left(x,u,u'\right), \quad x \in \left]a,b\right[\ .$$

Soit $\Phi \in C^3([a,b] \times \mathbb{R})$ avec $\Phi(a,\alpha) = \Phi(b,\beta)$ tel que

$$(u,\xi) \to \widetilde{f}(x,u,\xi) \quad \text{est convexe pour tout } x \in [a,b]$$

où

$$\widetilde{f}(x,u,\xi) = f(x,u,\xi) + \Phi_u(x,u)\,\xi + \Phi_x(x,u)\,.$$

Montrer qu'alors toute solution de l'équation d'Euler-Lagrange $\overline{u}$ de (E) est un minimiseur de (P).

(ii) Appliquer (i) à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger où

$$f_\lambda(u,\xi) = \frac{\xi^2 - \lambda^2 u^2}{2}$$

$$(P_\lambda) \qquad \inf_{u \in X}\left\{I_\lambda(u) = \int_0^1 f_\lambda\left(u(x), u'(x)\right)dx\right\} = m_\lambda$$

et $X = \left\{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\right\}$. Montrer que si $\lambda < \pi$, alors

$$\Phi(x,u) = \frac{\lambda}{2}\operatorname{tg}\left[\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]u^2, \quad (x,u) \in [0,1] \times \mathbb{R}$$

satisfait les hypothèses de (i) et conclure.