Exercice 1 (cf. Théorème 3.11). Généraliser le théorème sur l'équation d'Euler-Lagrange au cas où: $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $n > 1$. Plus précisément

$$(P) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx : u \in X \right\} = m$$

où

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné dont le bord est suffisamment régulier;
- $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$ est $C^2\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$
- $X = \left\{ u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) : \text{ avec } u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$.

Quelle forme prend cette équation dans les cas où $f = f(\xi) = |\xi|^2$ puis $f = f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$.

Exercice 2 (cf. Exercice 2.2.9). Soient $X = \left\{ u \in C^1([0,1]) : u(0) = 0,\ u(1) = 1 \right\}$ et

$$(P) \quad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_0^1 |u'(x)|\, dx \right\} = m\,.$$

Montrer que (P) a une infinité de solutions.

Exercice 3 (Brachistochrone) (cf. Cas 2.5.2). Soient $f(u, \xi) = \sqrt{1 + \xi^2}/\sqrt{u}$ et

$$(P) \quad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_0^b f(u(x), u'(x))\, dx \right\} = m$$

où

$$X = \left\{ u \in C^1([0,b]) : u(0) = 0,\ u(b) = \beta \text{ et } u(x) > 0,\ \forall x \in (0,b] \right\}.$$

Ecrire l'équation de Euler-Lagrange et son intégrale première. Soient $\mu > 0$ et

$$u(x) = \mu\left(1 - \cos\theta^{-1}(x)\right)$$

avec

$$\theta(t) = \mu(t - \sin t)\,.$$

Montrer que c'est une solution de l'équation de Euler-Lagrange et de son intégrale première.

Exercice 4 (Surfaces minimales de révolution) (cf. Cas 2.5.3 et Exercice 5.2.3). Soient $f(u, \xi) = 2\pi\, u \sqrt{1 + \xi^2}$,

$$(P) \quad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_0^1 f(u(x), u'(x))\, dx \right\} = m$$

où $X = \left\{ u \in C^1\left([0,1]\right) : u\left(0\right) = u\left(1\right) = \alpha,\ u > 0 \right\}$ et $\alpha > 0$. Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange et son intégrale première. Montrer que

$$u(x) = \lambda \cosh \frac{2x-1}{2\lambda},$$

o λ est tel que $\lambda \cosh \frac{1}{2\lambda} = \alpha$ est une solution de ces quations.

Exercice 5 (cf. Exercice 2.2.8). Soient $X = \left\{ u \in C^1\left([-1,1]\right) : u\left(-1\right) = 0,\ u\left(1\right) = 1 \right\}$, $f\left(u,\xi\right) = u^2\left(1-\xi\right)^2$ et

$$(P) \qquad \inf_{u \in X} \left\{ I\left(u\right) = \int_{-1}^{1} f\left(u\left(x\right), u'\left(x\right)\right) dx \right\} = m.$$

Montrer que (P) n'a pas de minimiseur dans X. Montrer, toutefois, que

$$\overline{u}\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0] \\ x & \text{si } x \in (0,1] \end{cases}$$

est une solution de (P) parmi toutes les fonctions C^1 par morceaux.