Exercice 1 (cf. Exercice 2.2.1). Généraliser le théorème sur l'équation d'Euler-Lagrange au cas où: $u : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Exercice 2 (cf. Exercice 2.2.2). Généraliser le théorème sur l'équation d'Euler-Lagrange au cas où: $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ et

$$(P) \qquad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_a^b f\left(x, u(x), ..., u^{(n)}(x)\right) dx \right\}$$

où $X = \left\{ u \in C^n([a, b]) : u^{(j)}(a) = \alpha_j \, , \; u^{(j)}(b) = \beta_j \, , \; 0 \leq j \leq n-1 \right\}$.

Exercice 3 (cf. Exercice 2.2.3). *(i)* Trouver la formulation appropriée du théorème sur l'équation d'Euler-Lagrange quand $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ et

$$(P) \qquad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x) \, u'(x)) \, dx \right\}$$

avec $X = \left\{ u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha \right\}$, c'est à dire qu'on laisse une des deux extrémités libre.

(ii) Même question, quand on laisse les deux extrémités libres; c'est à dire quand on minimise I sur $C^1([a, b])$.

Exercice 4 (cf. Exercice 1.5.7 et Théorème 1.58). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On définit la *transformée de Legendre* $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ de la fonction f par

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{x \, x^* - f(x)\}.$$

(i) Soient $1 < p < \infty$ et $f(x) = |x|^p / p$. Montrer que

$$f^*(x^*) = \frac{1}{p'} |x^*|^{p'}.$$

où p' est défini par $1/p + 1/p' = 1$.

(ii) Montrer que f^* est convexe.

(iii) Etablir que

$$f^{***} = f^*.$$