Exercice 1 (cf. Exercice 6.2.4). Deduire l'inégalité de Wirtinger (théorème 6.1), pour les fonctions C^1, de l'inégalité isopérimétrique (Théorème 6.4).

Exercice 2 (cf. Exercice 6.3.1). Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ des compacts,

$$\overline{a} = \min\{a : a \in A\} \quad \text{et} \quad \overline{b} = \max\{b : b \in B\}.$$

Montrer que

$$(\overline{a} + B) \cup \left(\overline{b} + A\right) \subset A + B$$

et déduire que

$$M(A) + M(B) \leq M(A + B).$$

Exercice 3 (cf. Exercice 5.2.4). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné connexe et de bord régulier. Soit $\Sigma_0 = v\left(\overline{\Omega}\right)$ où $v \in C^2\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3\right)$, $v = v(x, y)$, avec $v_x \times v_y \neq 0$ dans $\overline{\Omega}$. Si

$$\text{Aire}(\Sigma_0) \leq \text{Aire}(\Sigma)$$

parmi toutes les surfaces régulières Σ de classe C^1 avec $\partial\Sigma = \partial\Sigma_0$, alors Σ_0 est une surface minimale.

Suggestion : On peut déduire que

$$|v_x \times v_y| = \sqrt{EG - F^2}$$

du fait que

$$|a \times b|^2 = |a|\,|b| - \langle a, b\rangle^2.$$

On pourra également utiliser le fait que

$$\langle a; b \times c\rangle = \langle b, c \times a\rangle = \langle c, a \times b\rangle.$$