Exercice 1 (cf. Exercice 4.5.1). Soit $k \geq 0$, $u_0 \in W^{k+2,2}(\Omega)$ et $h \in W^{k,2}(\Omega)$. On considre les problmes

$$(P) \quad \inf\left\{ I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega h\, u : u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$$

$$(\tilde{P}) \quad \inf\left\{ \tilde{I}(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega (h + \Delta u_0)\, v : v \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$$

(i) Montrer que (P) a un minimiseur si et seulement si $(\tilde{P})$ a un minimiseur.

(ii) Généraliser le'estimation du théorme 4.12 au problme (P). C'est dire, montrer que si $\overline{u}$ est un minimiseur de (P), on a que $\overline{u} \in W_{loc}^{k+2,2}(\Omega)$ et pour tout $O \subset \overline{O} \subset \Omega$, il existe $\gamma = \gamma(O, \Omega) > 0$ tel que

$$\|\overline{u}\|_{W^{k+2,2}(O)} \leq \gamma \left(\|\overline{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u_0\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \right).$$

Exercice 2 (cf. Exercice 4.5.5). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné connexe et de bord Lipschitz. Soit $h \in W^{k,2}(\Omega)$, où $k \geq 0$ est un entier. Soit le problème de Neumann

$$(N) \quad \inf\left\{ I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - h\, u \right] : u \in X \right\} = m$$

où

$$X = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) : u_\Omega = 0 \right\} \quad \text{et} \quad u_\Omega = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int_\Omega u.$$

On a vu (cf. Exercice 3.2.2) que (N) admet une et une seule solution $\overline{u} \in X$ qui vérifie (voir (7.14))

$$\int_\Omega \left[\langle \nabla \overline{u}; \nabla \psi \rangle - (h - h_\Omega)\, \psi \right] = 0, \quad \forall\, \psi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Montrer que $\overline{u} \in W_{\text{loc}}^{k+2,2}(\Omega)$ et que, pour tout ouvert $O \subset \overline{O} \subset \Omega$, il existe une constante $\gamma = \gamma(O, \Omega) > 0$ telle que

$$\|\overline{u}\|_{W^{k+2,2}(O)} \leq \gamma\, \|h - h_\Omega\|_{W^{k,2}(\Omega)}.$$

Exercice 3 (cf. Exercice 4.5.4). Soient $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1/2 \right\}$ et

$$u(x) = u(x_1, x_2) = \log|\log|x||, \quad \text{si } x \in \Omega.$$

Montrer que $u \notin W^{2,1}(\Omega)$ alors que $\Delta u \in L^1(\Omega)$.