Exercice 1 (cf. Théorème 1.24). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega u(x)\,\psi(x)\,dx = 0, \quad \forall\,\psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Montrer que $u = 0$, p.p. dans Ω.

Suggestion. On pourra se contenter de montrer le résultat sous l'hypothèse plus forte $u \in L^2(\Omega)$.

Exercice 2 (cf. Corollaire 1.25). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega u(x)\,\psi(x)\,dx = 0, \quad \forall\,\psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ avec } \int_\Omega \psi = 0.$$

Montrer que $u =$constante, p.p. dans Ω.

Exercice 3 (cf. Exercice 1.5.1). Montrer que si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, alors

(i) f est convexe si et seulement si

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y); x - y \rangle, \quad \forall\,x, y \in \mathbb{R}.$$

(ii) f est convexe si et seulement si

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y); x - y \rangle \geq 0, \quad \forall\,x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, alors f est convexe si et seulement si

$$\left\langle \nabla^2 f(x)\,v; v \right\rangle, \quad \forall\,x, v \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 4 (cf. Exercice 1.5.3). Démontrer l'inégalité de Jensen quand $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 5 (cf. Exercice 1.5.9). Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction convexe, $p \geq 1$, $\alpha_1 > 0$ vérifiant

$$|f(x)| \leq \alpha_1 (1 + |x|^p), \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Montrer qu'il existe $\alpha_2, \alpha_3 > 0$, tels que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \leq \alpha_2 \left(1 + |x|^{p-1} \right), \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall\,i = 1, \cdots, n \tag{2}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha_3 \left(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1} \right) |x - y|, \quad \forall\,x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Noter que (2) implique toujours (1) indépendemment de la convexité de f.