EPFL - Mathématiques Bachelor 5
Sous la direction du Professeur Bernard Dacorogna
Assistant responsable : Gyula Csató

Les Espaces de Hölder et les Espaces de Sobolev

David Strütt

Automne 2010

Résumé

Dans ce projet de semestre, je vais étudier deux espaces de fonctions classiques.

Les premiers, les espaces de Hölder, sont des espaces dont les fonctions vérifient une condition plus forte que la continuite. On va définir ces espaces et voir qu'il s'agit d'espaces de Banach.

Les deuxièmes, les espaces de Sobolev sont des sous espaces des espaces de Lesbegue dont les éléments vérifient une condition de dérivabilité plus faible que la définition qu'on donne pour les fonctions continues. On va montrer des théorèmes d'approximations par fonctions lisses et qu'il s'agit d'espaces de Banach.

Ensite, on va montrer qu'on peut inclure les espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Les espaces de Hölder $C^{0,\gamma}(\Omega)$ **5**
- 2.1 L'Hölder continuité . . . 5
- 2.2 Les espaces de Banach $C^{0,\gamma}(\Omega)$ . . . 6

3 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ **8**
- 3.1 Dérivabilité faible . . . 8
- 3.2 Définition et exemples . . . 10
- 3.3 Convolution . . . 15
- 3.4 Propriétés . . . 26

4 Inclusion des espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder **32**
- 4.1 Inclusion en dimension quelconque . . . 32
- 4.2 Inclusion en dimension 1 . . . 41

5 Annexes **47**

Notations

Dans cette petite section, nous fixerons les notations utilisées tout au long de ce documents.

$\lvert X \rvert$	La valeur absolue de X si X est réel, la norme de X si X est un vecteur et la mesure de Lebesgue de X si X est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.
e^i	Le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, dont la $j^{\text{ème}}$ composante est δ_{ij}.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$\Omega_1 + \Omega_2$	La somme des ensembles $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ est $\Omega_1 + \Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_i \in \Omega_i \text{ tels que } x = x_1 + x_2\}$. Et, par convention, $\Omega_1 + \emptyset = \Omega_1$.
$B(x_0, r)$	La boule ouverte centrée en x_0 et de rayon r : $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lvert x - x_0 \rvert < r\}$
$\overline{B}(x_0, r)$	La boule fermée centrée en x_0 et de rayon r : $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lvert x - x_0 \rvert \leqslant r\}$
u_{x_i} ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$	La dérivée partielle de la fonction u par rapport à la variable x_i.
u'	La dérivée de la fonction u.
$u * v$	Le produit de convolution de deux fonction $u, v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini par $u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)\, v(y)\, dy$. Il es associatif et, par un changement de variables approprié, on peut voir que le produit de convolution est une opération commutative.
$\operatorname{supp} u$	Le support de la fonction continue u est l'ensemble $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \mid u(x) \neq 0\}}$.
$C(\Omega)$ ou $C^0(\Omega)$	L'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues.
$C\left(\overline{\Omega}\right)$	L'ensemble des fonctions $f \in C(\Omega)$ qu'on peut continuement prolonger sur $\overline{\Omega}$.
$\lVert f \rVert_{C(\overline{\Omega})}$	$\lVert f \rVert_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} \lvert f(x) \rvert$.
$C^m(\Omega)$	L'ensembles des fonctions $f \in C(\Omega)$ dont toutes les dérivées d'ordre m sont continues.
$C^\infty(\Omega)$	L'ensemble des fonctions $f \in \cap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$.
$C_0(\Omega)$	L'ensemble des fonctions $f \in C(\Omega)$ dont le support est un compact inclu dans Ω.
$C_0^m(\Omega)$	Pour $m \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, l'ensemble des fonctions $f \in C^m(\Omega)$ dont le support est un compact inclu dans Ω.
$\lVert f \rVert_{L^p(\Omega)}$	Pour $1 \leqslant p < \infty$, $\lVert f \rVert_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \lvert f \rvert^p\right)^{1/p}$. Si il n'y a pas d'ambiguité, on écrira simplememnt $\lVert f \rVert_{L^p}$.
$\lVert f \rVert_{L^\infty(\Omega)}$	$\lVert f \rVert_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant \lvert f(x) \rvert \text{ pour presque tout } x \in \Omega\}$. Si il n'y a pas d'ambiguité, on écrira simplement $\lVert f \rVert_{L^\infty}$.
$L^p(\Omega)$	Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lVert f \rVert_{L^p} < \infty$.
$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$	Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ dont l'adhérence est compacte et inclue dans Ω, $f \in L^p(\omega)$
p'	Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p' = p/(p-1)$ désigne l'exposant conjugué de p, de telle sorte que $1/p + 1/p' = 1$.

1 Introduction

Dans ce projet, nous allons étudier les espaces de Hölder et de Sobolev.

Les espaces de Hölder $C^{0,\gamma}$ sont des espaces contenant des fonctions au comportement très régulier ; elles vérifient une condition qui généralise la condition de Lipschitz, c'est-à-dire que pour toute fonction $u \in C^{0,\gamma}$, il existe une constante C telle que

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C |x - y|^{\gamma} .$$

Ces espaces définissent le cadre de l'étude des équations différentielles elliptiques (par exemple $\Delta u = f$), et permettent d'assurer que les problèmes sont bien posés.

Ensuite, nous allons étudier les espaces de Sobolev $W^{1,p}$. Si on considère les espaces L^p comme la fermeture de C^0 par rapport à la norme de l'intégrale, alors, les espaces $W^{1,p}$ seraient la fermeture de C^1, tout en gardant une information sur les dérivées. Cette information qu'on souhaite garder est la possibilité d'intégrer par parties. Autrement dit, $u \in W^{1,p}$ s'il existe une fonction $v \in L^p$, telle que pour toute fonction $\varphi \in C_0^{\infty}$, on a

$$\int u\varphi_{x_i} = -\int v\varphi.$$

On donne, dans ce cas là, à v un sens de dérivée. Mais, bien sûr, ce sens est plus faible que celui qu'on définit usuellement sur les fonctions de C^1 à l'aide du quotient différentiel,

$$\frac{u(x + he^i) - u(x)}{h}.$$

Néanmoins, on va se rendre compte que la définiton ci-dessus entraîne certaines propriétés du quotient différentiel. En effet, on aura une caractérisation des espaces de Sobolev qui nous dit, entre autre que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ est équivalent à l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$ est compact et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$, on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant C |h|$$

où $\tau_h u : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini par $\tau_h u(x) = u(x + h)$.

Ainsi, le quotient $\frac{\tau_h u - u}{h}$ est borné par une constante ; il ne peut donc pas exploser à l'infini.

Dans mon étude des espaces de Sobolev, je considère que le lecteur est familier avec la matière concernant les espaces de Lebesgue enseigné dans le cours d'analyse IV par le professeur Dacorogna.

Pour conclure ce projet, je vais inclure les espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder. En vérité, il ne s'agit pas vraiment d'une inclusion. En effet, contrairement à $C^{0,\gamma}$, $W^{1,p}$ est un ensemble quotient (sous la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ presque partout.) Ils sont donc en théorie incomparable. Mais, on va construire une injection de $W^{1,p}$ dans $C^{0,\gamma}$ qui associe à chaque classe d'équivalence de fonctions un représentant de cette classe. En effet, un théorème nous dit que pour toute fonction $u \in W^{1,p}$, il existe une fonction $v \in C^{0,\gamma}$ telle que $u = v$ presque partout (et donc, elles sont bien dans la même classe d'équivalence) et telle qu'il existe une constante C vérifiant $\|v\|_{C^{0,\gamma}} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}}$. L'injection que l'on construit est alors $u \longmapsto v$. Ainsi identifiant la classe d'équivalence et son image, on peut voir cette injection comme une inclusion.

Pour terminer cette introduction, je dois encore présenter la structure du document : La matière est présentée dans les sections 2 à 4. La section 5 intitulée «Annexes» est une liste de résultats dont on a besoin mais qui ne sont pas vraiment du domaine des espaces de Sobolev et des espaces de Hölder, ainsi que de nombreux résultats sur l'intégrale de Lesbegue. Elle n'est donc pas une section à lire en tant que telle, mais une section à laquelle on se réferre tout au long des sections 2 à 4.

2 Les espaces de Hölder $C^{0,\gamma}(\Omega)$

2.1 L'Hölder continuité

Définition 2.1 (Hölder continuité d'exposant γ)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $0 < \gamma \leqslant 1$. On dit que f est *Hölder continue d'exposant* γ si il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C |x - y|^{\gamma},$$

pour tout $x, y \in \Omega$.

Remarque 2.2.
La condition d'Hölder continuité implique la continuité. En effet, considérons une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Hölder continue d'exposant γ et fixons $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors par l'Hölder continuité, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C |x - y|^{\gamma}.$$

Si $C = 0$, alors la fonction est constante et donc clairement continue. Supposons donc $C > 0$ et posons $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. Alors, pour tout $x, y \in \Omega$ tels que $|x - y| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C |x - y|^{\gamma} \leqslant C\delta^{\gamma} = C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

ce qui implique que f est continue.

Exemple 2.3.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Montrons que f est Hölder continue d'exposant $\frac{1}{2}$.

Pour tout $a, b \geqslant 0$, on a trivialement

$$a + b \leqslant a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2,$$

ce qui nous mène à

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

dont on conclut

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}. \tag{1}$$

Soient maintenant $x, y \geqslant 0$. Quitte à les échanger, on suppose $x \geqslant y$. On a alors, par (1),

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x - y}.$$

ce qui montre que f est Hölder continue d'exposant $\frac{1}{2}$.

Notation 2.4 ($[f]_{\gamma,\Omega}$)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose

$$[f]_{\gamma,\Omega} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\gamma}}.$$

Remarque 2.5.
On a qu'une fonction définie sur un ouvert Ω est Hölder continue d'exposant γ si et seulement si $[f]_{\gamma,\Omega} < \infty$. En effet, si f est Hölder continue, on considère C tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\gamma$. Et alors, on a que pour tout $x, y \in \Omega$ différents

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma} \leqslant \frac{C|x-y|^\gamma}{|x-y|^\gamma} = C,$$

d'où, on obtient $[f]_{\gamma,\Omega} \leqslant C < \infty$.

Réciproquement si $[f]_{\gamma,\Omega} < \infty$, on a alors pour tout $x, y \in \Omega$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant [f]_{\gamma,\Omega} |x-y|^\gamma .$$

Lemme 2.6.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $[f]_{\gamma,\Omega}, [g]_{\gamma,\Omega} < \infty$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors,

(*i*) $[f+g]_{\gamma,\Omega} \leqslant [f]_{\gamma,\Omega} + [g]_{\gamma,\Omega}$.

(*ii*) $[af]_{\gamma,\Omega} = |a| [f]_{\gamma,\Omega}$.

Démonstration. Commençons par montrer (*i*). On a

$$\begin{aligned}
[f+g]_{\gamma,\Omega} &= \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)|}{|x-y|^\gamma} \\
&\leqslant \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left[\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\gamma} \right] \\
&\leqslant \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma} + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\gamma} \\
&\leqslant [f]_{\gamma,\Omega} + [g]_{\gamma,\Omega} ,
\end{aligned}$$

ce qui montre (*i*). Passons maintenant à (*ii*). On a

$$[af]_{\gamma,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|af(x) - af(y)|}{|x-y|^\gamma} = |a| \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma} = |a| [f]_{\gamma,\Omega} ,$$

ce qui établit le résultat voulu.

□

2.2 Les espaces de Banach $C^{0,\gamma}(\Omega)$

Définition 2.7 (Espace de Hölder)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $0 < \gamma \leqslant 1$. On définit l'espace de Hölder $C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ par

$$C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ f \in C\left(\overline{\Omega}\right) \;\mid\; \|f\|_{C(\overline{\Omega})} + [f]_{\gamma,\Omega} < \infty \right\},$$

qu'on munit de la norme

$$\|f\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C(\overline{\Omega})} + [f]_{\gamma,\Omega} .$$

Remarque 2.8.
Le lemme 2.6 nous garanti que $C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ est bien un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$ est bien une norme.

Théorème 2.9.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $0 < \gamma \leqslant 1$. Alors, $C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Il nous faut voir que les suites de Cauchy convergent. Soit donc $\left(f^k\right)_{k=0}^{\infty} \subset C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ une suite de Cauchy. C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|f^k - f^l\right\|_{C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)} = \left\|f^k - f^l\right\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} + \left[f^k - f^l\right]_{\gamma,\Omega} \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $k, l \geqslant N$. En particulier, $\left(f^k\right)_{k=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy de l'espace $C\left(\overline{\Omega}\right)$ *. Ainsi, il existe une fonction $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que $f^k \longrightarrow f$ dans $C\left(\overline{\Omega}\right)$. Nous allons voir qu'en réalité, $f^k \longrightarrow f$ dans $C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Commençons par voir que $f \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left[f^k - f^N\right]_{\gamma,\Omega} \leqslant \varepsilon$, pour tout $k \geqslant N$. On va montrer que $f - f^N \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$. On a, pour tous $x, y \in \Omega$ différents et $k \geqslant N$

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f^N(x) - f(y) + f^N(y)\right| &\leqslant \left|f(x) - f^k(x)\right| + \left|f(y) - f^k(y)\right| \\
&\quad + \left|f^k(x) - f^N(x) - f^k(y) + f^N(y)\right| \\
&\leqslant \left|f(x) - f^k(x)\right| + \left|f(y) - f^k(y)\right| \\
&\quad + \left[f^k - f^N\right]_{\gamma,\Omega} |x-y|^{\gamma} \\
&\leqslant \left|f(x) - f^k(x)\right| + \left|f(y) - f^k(y)\right| \\
&\quad + \varepsilon |x-y|^{\gamma}
\end{aligned}$$

Passant à la limite en k, on trouve

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f^N(x) - f(y) + f^N(x)\right| &\leqslant \lim_{k\to\infty} \left|f(x) - f^k(x)\right| + \lim_{k\to\infty} \left|f(y) - f^k(y)\right| \\
&\quad + \varepsilon |x-y|^{\gamma} \\
&\leqslant \varepsilon |x-y|^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par la remarque 2.5, page 6, on a que $f - f^N \in C^{0,\gamma}(\Omega)$, et $\left[f - f^N\right]_{\gamma,\Omega} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $k \geqslant N$, on a par le lemme 2.6, page 6,

$$\left[f - f^k\right]_{\gamma,\Omega} \leqslant \underbrace{\left[f - f^N\right]_{\gamma,\Omega}}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{\left[f^N - f^k\right]_{\gamma,\Omega}}_{\leqslant \varepsilon} \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui montre que $\left[f - f^k\right]_{\gamma,\Omega} \longrightarrow 0$. Ainsi

$$\left\|f - f^k\right\|_{C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)} = \left\|f - f^k\right\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} + \left[f - f^k\right]_{\gamma,\Omega} \longrightarrow 0$$

ce qui montre le résultat voulu.

□

*. Dans cette preuve, l'espace $C\left(\overline{\Omega}\right)$ est vu comme l'espace de Banach des fonctions $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ dont la norme $\|f\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)}$ est finie

3 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

3.1 Dérivabilité faible

Définition 3.1 (Dérivable au sens faible)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. On dit que u est *dérivable au sens faible* si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $g_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi$$

pour tout $\varphi \in C^1_0(\Omega)$.

Remarque 3.2.
Comme on s'y attend, on a bien que les fonctions dérivables au sens usuel le sont au sens faible. En effet, considérons $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, prenons $\varphi \in C^1_0(\Omega)$ quelconque et $\omega \subset \Omega$ un ouvert borné suffisament régulier pour qu'on puisse utiliser l'intégration par parties et suffisament grand pour contenir le support de φ. Alors, on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} = \int_\omega u\varphi_{x_i} = \int_{\partial\omega} u \underbrace{\varphi}_{0} \nu_i - \int_\omega u_{x_i}\varphi = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi$$

où $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ est la normale extérieure.

Posant $g_i = u_{x_i}$, on obtient le résultat cherché.

On souhaiterait maintenant écrire, pour u dérivable au sens faible que $u_{x_i} = g_i$. Néanmoins, on ne peut pas le faire tout de suite car pour le moment, nous ne savons pas si les fonctions g_i sont uniques.

Lemme 3.3.
Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in C_0(\Omega)$ on a

$$\int_I f\varphi = 0.$$

Alors, $f = 0$ presque partout.

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes :

Commençons par supposer que $f \in L^1(\Omega)$ et que Ω est borné.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par la densité des fonctions à support compact dans $L^p(\Omega)$ (théorème 5.3, page 47), on sait qu'il existe $g \in C_0(\Omega)$ tel que $\|f - g\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$. On a ainsi

$$\left|\int_\Omega g\varphi\right| = \left|\int_\Omega (g - f + f)\varphi\right| \leqslant \left|\int_\Omega (g - f)\varphi\right| + \left|\int_\Omega f\varphi\right|.$$

Or, par hypothèse, $\left|\int_\Omega f\varphi\right| = 0$. Et par l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page 47), on sait que $\left|\int_\Omega (g - f)\varphi\right| \leqslant \|f - g\|_{L^1} \|\varphi\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty}$. Ainsi on obtient

$$\left|\int_\Omega g\varphi\right| \leqslant \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty}. \tag{2}$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} K_1 &= \{x \in \Omega \mid g(x) \geqslant \varepsilon\} \\ K_2 &= \{x \in \Omega \mid g(x) \leqslant -\varepsilon\} \\ K &= K_1 \cup K_2. \end{aligned}$$

On a, par continuité de g que ces ensembles sont fermés, et comme le support de g est borné, ils le sont également. Définissons une fonction $\psi_0 : K \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_1 \\ -1 & \text{si } x \in K_2 \end{cases}.$$

Clairement, ψ_0 est continue et bornée. Ainsi, par le corollaire 5.10 page 48, on peut l'étendre en une fonction $\psi \in C_0(\Omega)$ telle que $-1 \leqslant \psi \leqslant 1$. Et on a :

$$\int_K |g| = \int_K g\psi = \int_\Omega g\psi - \int_{\Omega\setminus K} g\psi \leqslant \left|\int_\Omega g\psi\right| + \left|\int_{\Omega\setminus K} g\psi\right| \overset{(2)}{\leqslant} \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |g|\,|\psi| \leqslant \varepsilon + \int_{\Omega\setminus K} |g|.$$

Ce qui nous permet de majorer $\|g\|_{L^1}$ de la façon suivante

$$\|g\|_{L^1} = \int_\Omega |g| = \int_K |g| + \int_{\Omega\setminus K} |g| \leqslant \varepsilon + 2\int_{\Omega\setminus K} |g|.$$

Et comme $|g| \leqslant \varepsilon$ sur $\Omega\setminus K$ par définition de K, on peut encore majorer $\int_{\Omega\setminus K} |g|$ par $\varepsilon\,|\Omega|$ et donc on majore $\|g\|_{L^1}$ par $\varepsilon + 2\varepsilon\,|\Omega|$.

Ainsi, il vient :

$$\|f\|_{L^1} \leqslant \|f-g\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} \leqslant 2\varepsilon + 2\varepsilon\,|\Omega|.$$

Ceci étant vrai pour tout ε positif, on en déduit que $\|f\|_{L^1} = 0$ et donc que $f = 0$ presque partout.

Maintenant, il faut considérer le cas général : On admet que Ω puisse ne pas être borné et f n'est plus que localement intégrable.

Ecrivons Ω comme union d'ouverts dont l'adhérence est compacte. Par exemple, prenant $\Omega_n = \left\{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n\setminus\Omega) > \frac{1}{n} \text{ et } |x| < n\right\}$, on a $\overline{\Omega_n}$ compact (car fermé borné), inclu dans Ω et $\Omega = \cup_{n=1}^\infty \Omega_n$.

Ainsi, comme f et localement intégrable, $f \in L^1(\Omega_n)$, pour tout $n \geqslant 1$. Et par ce qu'on a fait au début de la preuve, on a que $f = 0$ presque partout sur Ω_n, $n \geqslant 1$ et on en conclut que $f = 0$ presque partout. □

Proposition 3.4.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ dériable au sens faible et $g_i, h_i \in L^p(\Omega)$ tels que

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi = -\int_\Omega h_i\varphi,$$

pour tout $\varphi \in C_0(\Omega)$.

Alors, $g_i = h_i$ presque partout.

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'utiliser le lemme 3.3, page 8 avec $f = g_i - h_i$.

On commence par montrer que $g_i - h_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Déjà, si $p = 1$, alors, il n'y a rien à montrer et donc on suppose que $p > 1$.

Soit $\omega \subset \Omega$ un sous ensemble ouvert dont l'adhérence est compacte et inclue dans Ω. On a, par l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page 47)

$$\int_\omega |g_i - h_i| \leqslant \left(\int_\omega |g_i - h_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\omega |1|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Or, l'expression $\left(\int_\omega |g_i - h_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ peut être majorée par $\|g_i - h_i\|_{L^p(\Omega)}$ qui est finie puisque $g_i, h_i \in L^p(\Omega)$ et l'expression $\left(\int_\omega |1|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$ est égale à $|\omega|^{\frac{1}{p'}}$, qui est finie car ω est borné.

Maintenant, il nous faut encore montrer que pour tout $\psi \in C_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega (g_i - h_i)\,\psi = 0.$$

Or, par hypothèse on a déjà, que pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (g_i - h_i)\,\varphi = 0.$$

Soit donc $\psi \in C_0(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\varphi_\varepsilon \in C_0^1(\Omega)$ telle que $\|\psi - \varphi_\varepsilon\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant \varepsilon / \|g_i - h_i\|_{L^p(\Omega)}$. Ainsi,

$$\left|\int_\Omega (g_i - h_i)\,\psi\right| \leqslant \underbrace{\left|\int_\Omega (g_i - h_i)\,\varphi_\varepsilon\right|}_{0} + \left|\int_\Omega (g_i - h_i)\,(\psi - \varphi_\varepsilon)\right|.$$

Utilisant maintenant l'inégalité de Hölder, on trouve,

$$\left|\int_\Omega (g_i - h_i)\,\psi\right| \leqslant \|g_i - h_i\|_{L^p(\Omega)}\,\|\psi - \varphi_\varepsilon\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre que pour tout $\psi \in C_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega (g_i - h_i)\,\psi = 0.$$

Donc, par le lemme 3.3, page 8, on a que $g_i - h_i = 0$ presque partout, ce qui montre le résultat voulu.

□

Définition 3.5 (Dérivée au sens faiblee)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$ dérivable au sens faible. Par la proposition 3.4, page 9, on a qu'il existe une unique fonction $g_i \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi$$

pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

On appelle g_i la *dérivée au sens faible de u par raport à x_i*, et dans la suite, on la notera u_{x_i} ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ si $n > 1$ et u' si $n = 1$.

3.2 Définition et exemples

Définition 3.6 (Espace de Sobolev)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leqslant p \leqslant \infty$. On définit *l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; u \text{ est dérivable au sens faible et } u_{x_i} \in L^p(\Omega)\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n\right\}.$$

De plus, on le muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^p}$$

ce qui en fait un espace vectoriel normé.

Exemple 3.7.
Cet exemple permet de voir que les fonctions des espaces de Sobolev peuvent être très irrégulières. Ici, on aura que la dérivée de notre fonction aura un nombre infini de discontinuités. Construisons donc cette fonction.

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$. On voit très vite que $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$. De plus, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} - 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Ce qui nous permet d'écrire l'intervalle $]0,1[$ comme l'union disjointe

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \left]a_n, a_{n+1}\right] = \left]0,1\right[.$$

Définissions maintenant $f_n :]a_n, a_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x - a_n & \text{si } x \in \left]a_n, a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ \\ -x + a_{n+1} & \text{si } x \in \left]a_n + \frac{1}{2^{n+1}}, a_{n+1}\right] \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il y a plusieurs choses à remarquer sur cette suite de fonctions.

Premièrement, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonctions f_n est continue. En effet, on voit que la valeur de $x - a_n$ coincide avec celle de $-x + a_{n+1}$ en $x = a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. Plus précisément, on a $a_n + \frac{1}{2^{n+1}} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} - a_n - \frac{1}{2^{n+1}} + a_{n+1} = -a_n - \frac{1}{2^{n+1}} + a_{n+1}$.

Deuxièmement, on a que $f_n = f_n(x)\,\chi_{]a_n, a_{n+1}]}(x)$, où, pour $A \subset \mathbb{R}$, la fonction $\chi_A : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble A, c'est à dire

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\int_0^1 f_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n \tag{3}$$

Troisièmement, on a que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$. La borne inférieure découle du fait que, sur chaque morceau, f_n est positive. Pour la borne supérieure, on voit que f_n atteint son maximum en $a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ et donc,

$$f_n(x) \leqslant f_n\left(a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = a_n + \frac{1}{2^{n+1}} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 1.$$

Maintenant, nous pouvons définir la fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ par

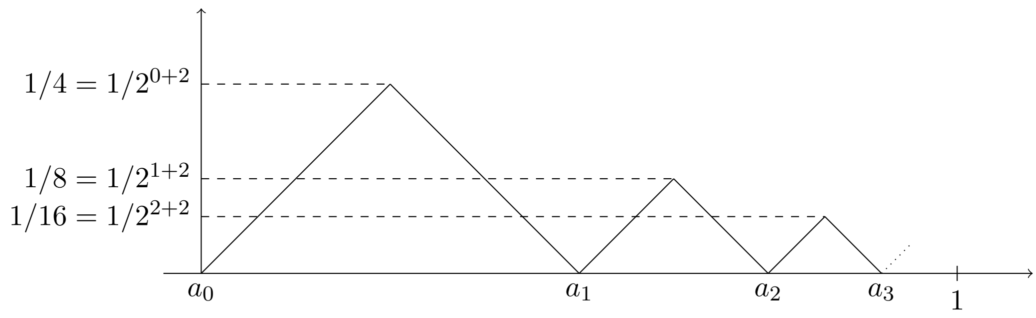

Figure 1 – Un aperçu du graphe de f

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Notons, que $0 \leqslant f \leqslant 1$.

La borne inférieure est claire. Pour la borne supérieure, ayant écrit l'intervalle $]0,1[$ comme une union disjointe, on a que pour tout $x \in]0,1[$, il existe un unique $j \in \mathbb{N}$ tel que $x \in]a_j, a_{j+1}]$ et par conséquent,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, \chi_{]a_n,a_{n+1}]}(x) = f_j(x) \leqslant 1.$$

Montrons maintenant que $f \in W^{1,1}(]0,1[)$.

Premièrement, $f \in L^1(]0,1[)$. En effet,

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx$$

A ce point, on voudrait sortir la somme de l'intégrale. Pour ce faire, on majore notre intégrande par 1, et on applique le théorème de la convergence dominée (théorème 5.1, page 47), ce qui nous donne

$$\|f\|_{L^1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \overset{(3)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(x)\, dx.$$

Or, on peut très rapidement se convaincre que $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(x)\, dx$ est l'aire du $n+1^{\text{ème}}$ triangle formé par le graphe de f (figure 1, on voit que le premier tirangle est formé par le graphe de f_0) dont la base fait $\frac{1}{2^{n+1}}$ et dont la hauteur fait $\frac{1}{2^{n+2}}$. On a donc $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} = 2^{-2n-4}$. Ainsi, il vient,

$$\|f\|_{L^1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n-4} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Ce qui montre que $f \in L^1(]0,1[)$.

Montrons maintenant que f est dérivable. Soit $g_n :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]a_n, a_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left]a_n + \frac{1}{2^{n+1}}, a_{n+1}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarquons que $g_n = g_n \chi_{]a_n, a_{n+1}]}$, comme on avait pour f_n.

A partir de cette famille de fonctions, construisons $g :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_n(x).$$

et montrons que $f' = g$. Soit $\varphi \in C_0^1(]0,1[)$. On a

$$\int_0^1 f\varphi' = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\varphi'(x)\,dx$$

On souhaiterait à nouveau permuter limite et intégrale. Pour ce faire, on majore notre intégrande par $|\varphi'|(x) \in L^1(\Omega)$ et on applique le théorème de la convergence dominée (théorème 5.1, page 47). Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\varphi' &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\chi_{]a_n,a_{n+1}]}\varphi'(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f_n(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{a_n}^{a_n+\frac{1}{2^{n+2}}} (x-a_n)\varphi'(x)\,dx + \int_{a_n+\frac{1}{2^{n+2}}}^{a_{n+1}} (-x+a_{n+1})\varphi'(x)\,dx\right] \end{aligned}$$

Ici, on a que les fonctions $x \longmapsto x - a_n$ et $x \longmapsto -x + a_{n+1}$ sont continument dérivables. Ainsi, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\varphi' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[[(x-a_n)\varphi(x)]_{x=a_n}^{x=a_n+\frac{1}{2^{n+2}}} + [(-x+a_{n+1})\varphi(x)]_{x=a_n+\frac{1}{2^{n+2}}}^{x=a_{n+1}} - \int_{a_n}^{a_{n+1}} g_n\varphi\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+2}}\varphi\left(a_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right) - \frac{1}{2^{n+2}}\varphi\left(a_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right) - \int_{a_n}^{a_{n+1}} g_n\varphi\right] \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} g_n\varphi \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 g_n\chi_{]a_n,a_{n+1}]}\varphi. \end{aligned}$$

Ici, on souhaite permuter limite et intégrale. On majore, comme toujours notre intégrande par $|\varphi| \in L^1$ et on applique le théorème de la convergence dominée (théorème 5.1, page 47).

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f\varphi' &= -\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} g_n \chi_{]a_n,a_{n+1}]}\varphi \\
&= -\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} g_n \varphi \\
&= -\int_0^1 g\varphi.
\end{aligned}$$

Ainsi, g est bien la dérivée de f. Il ne reste plus qu'à voir que $g \in L^1\left(]0,1[\right)$. On a

$$\|g\|_{L^1} = \int_0^1 |g| = \int_0^1 1 = 1.$$

Ce qui montre que $g \in L^1\left(]0,1[\right)$.

On a donc bien que f, si irrégulière soit-elle est dans $W^{1,1}\left([0,1]\right)$.

Exemple 3.8.
Cet exemple va nous permettre de voir qu'il existe tout de même des fonctions de $L^p\left(\Omega\right)$ qui ne sont pas dérivable au sens faible. Considérons $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}.$$

On a $\|f\|_{L^p} = \frac{1}{\sqrt[p]{2}}$ pour $1 \leqslant p < \infty$ et $\|f\|_{L^\infty} = 1$. Ainsi, $f \in L^p\left([0,1]\right)$ pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Mais, montrons que $f \notin W^{1,p}\left([0,1]\right)$.

Par l'absurde, supposons le contraire, c'est-à-dire $f \in W^{1,p}\left([0,1]\right)$. Notons g sa dérivée sur $[0,1]$. Or, en se restreignant à l'intervalle $[0,1/2]$, on doit avoir que $g\Big|_{[0,1/2]}$ est la dérivée de $f\Big|_{[0,1/2]} \equiv 0$. En effet, en étendant les fonctions continuement dérivable et à support compact sur $[0,1/2]$ par 0 sur $]1/2,1]$, on obtient une fonction continuement dérivable et à support compact sur $[0,1]$. Ainsi, $\int_0^{1/2} f\varphi' = -\int_0^{1/2} g\varphi$ pour tout $\varphi \in C_0^1\left([0,1/2]\right)$. Or, comme la fonction identiquement nulle est sa propre dérivée, on doit avoir que $g = 0$ presque partout sur $[0,1/2]$.

Par un raisonnement analogue, on conclut que $g = 0$ presque partout sur $]1/2,1]$. Ainsi, on obtient que $g = 0$ presque partout sur $[0,1]$.

Et donc, $\int_0^1 f\varphi' = -\int_0^1 g\varphi = 0$.

Soit maintenant $\varphi \in C^1\left([0,1]\right)$ qui ne s'annule pas en $1/2$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f\varphi' &= \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{f\left(x\right)}_{0} \varphi'\left(x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{f\left(x\right)}_{1} \varphi'\left(x\right) dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi'\left(x\right) dx \\
&= \underbrace{\varphi\left(1\right)}_{0} - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

3.3 Convolution

Définition 3.9 (Support d'une fonction quelconque)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Posons

$$\mathrm{N}(f) = \{\omega \subset \Omega \mid \omega \text{ est ouvert et } f = 0 \text{ presque partout sur } \omega\}$$

et

$$S = \bigcup_{\omega \in \mathrm{N}(f)} \omega.$$

On définit le *support de f*, $\mathrm{supp} f$, par

$$\mathrm{supp} f = \Omega \backslash S.$$

Remarque 3.10.
On a bien que $f = 0$ presque partout sur S. Ceci n'est pas trivial car l'ensemble $\mathrm{N}(f)$ n'est pas forcément dénombrable.

Néanmoins, on peut toujours écrire S comme union de compacts. Prenant par exemple $K_m = \left\{x \in S \mid \mathrm{dist}(x, \Omega\backslash S) \geqslant \frac{1}{m} \text{ et } |x| \leqslant m\right\}$, on a K_m compact et $S = \cup_{m=1}^{\infty} K_m$. Voyons d'abord que K_m est fermé (l'aspect borné étant trivial).

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K_m$, une suite convergente vers x. On a, par l'inégalité triangulaire que $\frac{1}{m} \leqslant \mathrm{dist}(x_k, \Omega\backslash S) \leqslant \mathrm{dist}(x_k, x) + \mathrm{dist}(x, \Omega\backslash S)$. En passant à limite, on obtient $\frac{1}{m} \leqslant \mathrm{dist}(x, \Omega\backslash S)$, et donc $x \in K_m$, ce qui montre que K_m est fermé.

Voyons maintenant que $S = \cup_{m=1}^{\infty} K_m$. Clairement, $\cup_{m=1}^{\infty} K_m \subset S$. Soit donc $x \in S$. Alors, comme S est ouvert en tant qu'union d'ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset S$. D'ou, $\mathrm{dist}(x, \Omega\backslash S) \geqslant \varepsilon$ et donc, prenant $m \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{m} \leqslant \varepsilon$, on obitent que $\frac{1}{m} \leqslant \varepsilon \leqslant \mathrm{dist}(x, \Omega\backslash S)$, et donc, $x \in K_m$, ce qui montre que $S = \cup_{m=1}^{\infty} K_m$.

Ainsi, pour tout m, la famille $\mathrm{N}(f)$ est un recouvrement ouvert de K_m. Et donc, par compacité il existe une sous famille finie $\omega_{m,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k_m$ de $\mathrm{N}(f)$ telle que $K_m \subset \cup_{i=1}^{k_m} \omega_i$. D'où, on obtient

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_m} \omega_{m,i}.$$

La famille des $\omega_{m,i}$ étant dénombrable, on obtient que $f = 0$ presque partout sur S. En effet, soit $\tilde{\omega}_{m,i} = \{x \in \omega_{m,i} \mid f(x) \neq 0\}$. Alors, on a que $\tilde{S} := \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$ est donné par

$$\tilde{S} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_m} \tilde{\omega}_{m,i}.$$

Or, on a, par sous-additivité de la mesure,

$$\left|\tilde{S}\right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_m} \underbrace{|\tilde{\omega}_{m,i}|}_{0} = 0,$$

ce qui montre que $f = 0$ presque partout sur S.

Ainsi, on peut interpréter S comme le plus grand sous ensemble ouvert de Ω où $f = 0$ presque partout. Et donc, le support de f est le plus petit sous ensemble fermé de Ω qui contienne un ensemble de mesure non nulle où f ne s'annule pas.

On a bien que cette définition généralise la définition donnée dans les notations. Soit $f \in C(\Omega)$. Notons $\mathrm{supp}_c f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$ et montrons que $\mathrm{supp}_c f = \mathrm{supp} f$.

Premièrement, montrons par contraposée que $\mathrm{supp}_c f \subset \mathrm{supp} f$. Soit $x \notin \mathrm{supp} f$. Alors, il existe un ouvert ω dans $\mathrm{N}(f)$ tel que $x \in \omega$ et $f = 0$ presque partout sur ω. Comme f est continue, ceci implique que $f = 0$ partout sur ω. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \omega$ et donc, pour tout $\xi \in B(x, \varepsilon)$, $f(\xi) = 0$ ce qui montre que $x \notin \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}} = \mathrm{supp}_c f$.

Deuxièmement, montrons par contraposée que $\mathrm{supp} f \subset \mathrm{supp}_c f$. Soit $x \notin \mathrm{supp}_c f$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}^c$. En d'autre termes, $f = 0$ presque partout (partout en fait) sur $B(x, \varepsilon)$. Ainsi, $B(x, \varepsilon) \in \mathrm{N}(f)$, ce qui montre que $x \notin \mathrm{supp} f$.

Théorème 3.11.
Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$y \longmapsto f(x-y)\, g(y)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, et

$$\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$$

ce qui signifie que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. La démonstration se fait en trois étapes. Premièrement, supposons que $p = \infty$. Alors, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy \leqslant \|g\|_{L^\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dy}_{\|f\|_{L^1}} < \infty$$

ce qui montre que la fonction $y \longmapsto f(x-y)\, g(y)$ est intégrable et nous donne également l'estimation

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}.$$

Deuxièmement, supposons que $p = 1$. Alors, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ où $|g(y)|$ est fini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx = |g(y)|\, \|f\|_{L^1}.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right| dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dy dx = \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, dy = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

ce qui montre l'estimation et que la fonction $(x, y) \longmapsto f(x-y)\, g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Ainsi par le théorème de Fubini (thèorème 5.2, page 47), ceci montre également que la fonction $y \longmapsto f(x-y)\, g(y)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Considérons maintenant le cas $1 < p < \infty$. Alors, par ce qu'on a montré dans la partie $p = 1$, on a que la fonction $y \longmapsto |f(x-y)|\, |g(y)|^p$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et donc, la fonction $y \longmapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|$ est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Or, on a également que $|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, par l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page 47), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}\,|g(y)|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(y)|}_{\in L^p(\mathbb{R}^n)}\underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)}\,dy \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} < \infty
\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $y \longmapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que

$$|(f*g)(x)|^p \leqslant (|f| * |g|^p)(x)\,\|f\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\,dy &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|^p)(x)\,\|f\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}}\,dx \\
&\leqslant \||f| * |g|^p\|_{L^1}\,\|f\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}}
\end{aligned}$$

Or, comme $|f|\,, |g|^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on peut leur appliquer l'estimation qu'on a montré dans le cas $p = 1$, et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\,dy &\leqslant \|f\|_{L^1}\,\||g|^p\|_{L^1}\,\|f\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}} \\
&\leqslant \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{p'}+1}\,\|g\|_{L^p}^p.
\end{aligned}$$

Ce qui nous mène à

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^p} &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\,dy\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}}\,\|g\|_{L^p} \\
&\leqslant \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^p}
\end{aligned}$$

et montre l'estimation voulue.

□

Proposition 3.12.
Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Alors,*

$$\mathrm{supp}\,(f*g) \subset \overline{\mathrm{supp}f + \mathrm{supp}g}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé tel que la fonction $y \longmapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable. Posons $F_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par $F_x(y) = f(x-y)$. On a clairement que $\mathrm{supp}F_x = x - \mathrm{supp}f$. De plus, on a que

$$\mathrm{supp}\,(F_x g) \subset \mathrm{supp}F_x \cap \mathrm{supp}g = (x - \mathrm{supp}f) \cap \mathrm{supp}g.$$

En effet, soit $y \notin \mathrm{supp}F_x \cap \mathrm{supp}g$. Sans perte de généralité, supposons que $y \notin \mathrm{supp}F_x$. Alors, il existe un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que $F_x = 0$ presque partout sur ω et $x \in \omega$. Par conséquent, $F_x g = 0$ presque partout sur ω et donc, $x \notin \mathrm{supp}\,(F_x g)$.

Ainsi, on a que

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy\\ &= \int_{(x-\mathrm{supp}f)\cap\mathrm{supp}g} f(x-y)\,g(y)\,dy\end{aligned}$$

Or, si $x \notin \overline{\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g}$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(x,\varepsilon)\subset\left(\overline{\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g}\right)^c$. De plus, pour tout $\xi\in B(x,\varepsilon)$ on a que $(\xi-\mathrm{supp}f)\cap\mathrm{supp}g=\emptyset$. En effet, supposons par l'absurde que $y\in(\xi-\mathrm{supp}f)\cap\mathrm{supp}g$. Alors, $\xi-y\in\mathrm{supp}f$ et $y\in\mathrm{supp}g$. D'où, $\xi\in\mathrm{supp}f+y$ et donc, $\xi\in\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}g$, ce qui est une contradiction. Ainsi $(f*g)(\xi)=0$ pour tout $\xi\in B(0,\varepsilon)$. Et donc, $B(x,\varepsilon)\in\mathrm{N}(f*g)$, ce qui implique que $x\notin\mathrm{supp}(f*g)$ et montre le résultat voulu. □

Proposition 3.13.
Soient $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $h\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Définisson $f^\vee:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ par

$$f^\vee(x)=f(-x).$$

Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)\,h=\int_{\mathbb{R}^n}(f^\vee*h)\,g.$$

Remarque 3.14.
On a bien que $(f*g)\,h\in L^1(\mathbb{R}^n)$. En effet, par le théorème 3.11, page 16, on a que $f*g\in L^p(\mathbb{R}^n)$, et par l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page 47), on a

$$\|(f*g)\,h\|_{L^1}\leqslant\|f*g\|_{L^p}\,\|h\|_{L^{p'}}.$$

Idem pour $(f^\vee*h)\,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration de la proposition 3.13. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)\,h &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy h(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,h(x)\,dx g(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^\vee(y-x)\,h(x)\,dx g(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(f^\vee*h)\,g\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat voulu. □

Proposition 3.15.
Soient $f\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Alors,

$$f*g\in C^1(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f*g]=f_{x_i}*g.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $\omega \subset \mathbb{R}^n$ on ouvert borné qui contient le support de f. Posons

$$\Omega = \bigcup_{0 \leqslant h \leqslant 1} x + he^i - \omega.$$

On a que Ω est ouvert en tant qu'union d'ouverts et borné. En effet, comme ω est borné, il existe $m > 0$ tel que $|y| \leqslant m$ pour tout $y \in \omega$. Posons $M = |x| + 1 + m$. Alors, M est une borne pour Ω. En effet, soit $\xi \in \Omega$. Alors, il existe $0 \leqslant h \leqslant 1$ tel que $\xi \in x + he^i - \omega$, et donc, il existe $y \in \omega$ tel que $\xi = x + he^i - y$. Ainsi, $|\xi| \leqslant |x| + |he^i| + |y| \leqslant |x| + 1 + m = M$.

On a donc $g \in L^1(\Omega)$. Et pour tout $0 \leqslant h \leqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + he^i - y\right) g(y)\, dy &= \int_{x+he^i-\omega} f\left(x + he^i - y\right) g(y)\, dy \\ &= \int_{\Omega} f\left(x + he^i - y\right) g(y)\, dy,\end{aligned}$$

qui est bien défini.

Soit $1 \geqslant h > 0$ destiné à tendre vers 0. On a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f * g\left(x + he^i\right) - f * g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_{\Omega} \frac{f\left(x + he^i - y\right) - f(x - y)}{h} g(y)\, dy.$$

Ici, on aimerait permuter limite et intégrale. Pour ce faire, on voudrait appliquer le théorème de la convergence dominée (théorème 5.1, page 47), et il nous faut donc majorer notre intégrande par une expression indépendante de h.

Définissions $F(\xi) = f\left(x + \xi e^i - y\right)$, pour $\xi \in [0, h] \subset [0, 1]$.

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_h \in]0, 1[\subset [0, 1]$ tel que

$$\frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(\xi_h).$$

Or,

$$\begin{aligned}F'(\xi_h) &= \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}\left(x + \xi_h e^j - y\right) \frac{\partial}{\partial \xi}\left[x_j + \xi_h e^i_j - y_j\right] \\ &= f_{x_i}\left(x + \xi_h e^i - y\right).\end{aligned}$$

Ainsi, posant,

$$G(y) = \|f_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\, g(y),$$

on a,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f\left(x + he^i - y\right) - f(x - y)}{h} g(y)\right| &= \left|\frac{F(h) - F(0)}{h} g(y)\right| \\ &= \left|F'(\xi_h)\, g(y)\right| \\ &= \left|f_{x_i}\left(x + \xi_h e^i - y\right) g(y)\right| \\ &\leqslant |G(y)|.\end{aligned}$$

On peut donc utiliser le théorème de la convergence dominée, et on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}[f*g](x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f*g\left(x+he^i\right)-f*g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\int_\Omega \frac{f\left(x+he^i-y\right)-f(x-y)}{h}g(y)\,dy\\
&= \int_\Omega \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+he^i-y\right)-f(x-y)}{h}g(y)\,dy\\
&= \int_\Omega f_{x_i}(x-y)\,g(y)\,dy\\
&= \left(f_{x_i}*g\right)(x)
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat voulu. □

Définition 3.16 (Suite régularisante)**.**
Une suite $(\rho_k)_{k=0}^{\infty}\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une *suite régularisante* si

(i) $\rho_k \geqslant 0$ pour tout $k\geqslant 1$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k = 1$ pour tout $k\geqslant 1$,

(iii) $\mathrm{supp}\rho\subset B\left(0,\frac{1}{k}\right)$.

Remarque 3.17.
Il existe bel et bien des suites régularisantes. On va montrer qu'il en existe dans le cas $n=1$, et ensuite, on généralisera sans démonstration à $\mathbb{R}^n$.

Soit la fonction $\rho:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$\rho(x)=\begin{cases}\alpha e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } x\in]-1,1[\\ \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où $\alpha=\left(\int_{-1}^{1}e^{\frac{1}{x^2-1}}\right)^{-1}dx$.

On a que le support de la fonction ρ est inclu dans l'intervalle $[0,1]$, et donc, elle a un support compact. De plus $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ car si on la dérive n'importe quel nombre de fois, on obtient quelque chose de la forme $\frac{P(x)}{G(x)}e^{\frac{1}{x^2-1}}$, où P et Q sont des polynômes bien définis sur $]-1,1[$. Et donc, si x tend vers -1 ou 1, on a que l'exponentielle va dominer et donc, la valeur de la fonctions tendra vers 0.

Notons également que $\int_{\mathbb{R}}\rho(x)\,dx=1$ grâce à la définition de la constante α.

Posons maintenant $\rho_k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ comme $\rho_k(x)=(k+1)\,\rho((k+1)\,x)$. Alors, le support de ρ_k est l'intervalle $\left[\frac{-1}{k+1},\frac{1}{k+1}\right]\subset\left]\frac{-1}{k},\frac{1}{k}\right[$, ce qui montre que ρ_k est une suite régularisante.

Regardons maintenant comment faire dans $\mathbb{R}^n$. On pose $\rho(x)=\alpha e^{\frac{1}{|x|^2-1}}\chi_{B(0,1)}$, avec $\alpha=\left(\int_{B(0,1)}e^{\frac{1}{|x|^2-1}}dx\right)^{-1}$, et $\rho_k(x)=(k+1)^n\rho((k+1)\,x)$. De cette façon, on obtient exactement les bonnes propriétés.

Définition 3.18 (Suite troncante)**.**
Pour $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0\leqslant\zeta\leqslant 1$, $\zeta=1$ sur $\overline{B}(0,1)$ et $\zeta=0$ sur $\mathbb{R}^n\backslash B(0,2)$, on définit une *suite troncante* ζ_k par

$$\zeta_k(x)=\zeta\left(\frac{x}{k}\right).$$

Elle vérifie les propriétés

(i) $\zeta_k = 1$ sur $\overline{B}(0,k)$,

(ii) $\zeta_k = 0$ sur $\mathbb{R}^n \backslash B(0,2k)$.

Proposition 3.19.
Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. *Alors,*

$$\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho * u] = \rho * u_{x_i}.$$

Démonstration. On fait la démonstration en deux étapes : on commence par montrer le résultat en supposant que ρ a un support compact, et ensuite, on le montre dans le cas général en apprchant ρ par une suite de fonctions dont le support est compact.

Supposons donc que le support de ρ est compact.

Soit $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. On a par la proposition 3.13, page 18,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u)\, \varphi_{x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\rho^\vee * \varphi_{x_i}\right) u.$$

De plus, par la proposition 3.15, page 18, on a que $\rho^\vee * \varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, et que $\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho^\vee * \varphi] = \rho^\vee * \varphi_{x_i}$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u)\, \varphi_{x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}[\rho^\vee * \varphi]\, u.$$

Mais, par la proposition 3.12, page 17, on a que le support de $\rho^\vee * \varphi$ est compact. D'où, $\rho^\vee * \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ et on peut donc utiliser le fait que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u)\, \varphi_{x_i} = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\rho^\vee * \varphi\right) u_{x_i}.$$

Utilisant à nouveau la proposition 3.13, page 18, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u)\, \varphi_{x_i} = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\rho * u_{x_i}\right) \varphi.$$

ce qui montre que $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que $\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho * u] = \rho * u_{x_i}$.

Si maintenant ρ n'as pas un support compact, on introduit à l'aide du théorème 5.3, page 47, une suite $(\rho_k)_{k=0}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que ρ_k converge vers ρ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Par ce qu'on a fait ci-dessus, on a que $\rho_k * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que $\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho_k * u] = \rho_k * u_{x_i}$.

De plus, on a par l'estimation du théorème 3.11, page 16 que

$$\begin{aligned} \|\rho_k * u - \rho * u\|_{L^p} = \|(\rho_k - \rho) * u\|_{L^p} &\leqslant \|\rho_k - \rho\|_{L^1} \|u\|_{L^p} \longrightarrow 0 \\ \|\rho_k * u_{x_i} - \rho * u_{x_i}\|_{L^p} = \|(\rho_k - \rho) * u_{x_i}\|_{L^p} &\leqslant \|\rho_k - \rho\|_{L^1} \|u_{x_i}\|_{L^p} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\rho_k * u$ converge vers $\rho * u$ et que $\rho_k * u_{x_i}$ converge vers $\rho * u_{x_i}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Soit maintenant $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u)\, \varphi_{x_i} + \int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u_{x_i})\, \varphi\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} [(\rho * u) - (\rho_k * u)]\, \varphi_{x_i} + \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_k * u)\, \varphi_{x_i}\right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_k * u_{x_i})\, \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} [(\rho * u_{x_i}) - (\rho_k * u_{x_i})]\, \varphi\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\rho * u - \rho_k * u|\, |\varphi_{x_i}| + \int_{\mathbb{R}^n} |\rho * u_{x_i} - \rho_k * u_{x_i}|\, |\varphi|. \end{aligned}$$

Et donc par l'inégalité de Hölder (thèorème 5.4, page 47)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u)\, \varphi_{x_i} + \int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u_{x_i})\, \varphi\right| \leqslant \|\rho * u - \rho_k * u\|_{L^p} \|\varphi_{x_i}\|_{L^{p'}} + \|\rho * u_{x_i} - \rho_k * u_{x_i}\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}} .$$

Comme le terme de droite tend vers 0, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u)\, \varphi_{x_i} = - \int_{\mathbb{R}^n} (\rho * u_{x_i})\, \varphi,$$

ce qui montre que $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que $\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho * u] = \rho * u_{x_i}$. □

Lemme 3.20.
Soient $1 \leqslant p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $(\rho_k)_{k=0}^{\infty}$ *une suite régularisante et* $(\zeta_k)_{k=0}^{\infty}$ *une suite troncante. Alors,*

$$\zeta_k (\rho_k * u) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\zeta_k (\rho_k * u) \longrightarrow u$$

dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Par le théorème 5.6, page 47 on a que $\rho_k * u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$. Et donc, multiplier par une fonction à support compact (et qui est donc clairement dans $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$), nous donne une fonction qui est dans $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

On commence par voir que $\zeta_k u \longrightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\lim_{k \to \infty} \zeta_k u = u,$$

point par point. Et, par convexité et croissance de la fonction $x \longmapsto |x|^p$

$$|\zeta_k u - u|^p \leqslant t \left|\frac{\zeta_k u}{t}\right|^p + (1-t) \left|\frac{-u}{1-t}\right|^p \leqslant \left(t^{1-p} + (1-t)^{1-p}\right) |u|^p .$$

Fixant maintenant $t = \frac{1}{2}$, on obitent que $|\zeta_k u - u|^p \leqslant \left(\frac{1}{2}^{1-p} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-p}\right) |u|^p$. Cette dernière fonction étant dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée (théorème 5.1, page 47) pour obtenir,

$$\lim_{k \to \infty} \|\zeta_k u - u\|_{L^p} = \left\|\lim_{k \to \infty} \zeta_k u - u\right\|_{L^p} = 0,$$

ce qui montre que $\zeta_k u \longrightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Voyons maintenant que $\zeta_k (\rho_k * u) \longrightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\zeta_k (\rho_k * u) - u = \zeta_k (\rho_k * u) - \zeta_k u + \zeta_k u - u = \zeta_k (\rho_k * u - u) + \zeta_k u - u,$$

ce qui nous mène à

$$\|\zeta_k (\rho_k * u) - u\|_{L^p} \leqslant \|\zeta_k (\rho_k * u - u)\|_{L^p} + \|\zeta_k u - u\|_{L^p} .$$

Or, comme $0 \leqslant \zeta_k \leqslant 1$, on a que $\|\zeta_k (\rho_k * u - u)\|_{L^p} \leqslant \|\rho_k * u - u\|_{L^p}$ et donc

$$\|\zeta_k (\rho_k * u) - u\|_{L^p} \leqslant \|\rho_k * u - u\|_{L^p} + \|\zeta_k u - u\|_{L^p} \longrightarrow 0,$$

par le théorème 5.6, page 47, et ce qu'on a fait ci-dessus.

Maintenant, calculons la dérivée de $\zeta_k(\rho_k * u)$. Par la règle du produit, on a $\frac{\partial}{\partial x_i}[\zeta_k(\rho_k * u)] = \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(\rho_k * u) + \zeta_k \frac{\partial}{\partial x_i}[\rho_k * u]$. Et par la proposition 3.19, page 21, on a que $\frac{\partial}{\partial x_i}[\rho_k * u] = \rho_k * u_{x_i}$. Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\zeta_k(\rho_k * u)] = \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(\rho_k * u) + \zeta_k(\rho_k * u_{x_i}).$$

Cette dérivée est bien dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, par les mêmes arguments que pour $\zeta_k(\rho_k * u)$.

Il ne nous reste donc plus qu'à voir que $\frac{\partial}{\partial x_i}[\zeta_k(\rho_k * u)] \longrightarrow u_{x_i}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}[\zeta_k(\rho_k * u)] - u_{x_i} \right\|_{L^p} &\leqslant \left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(\rho_k * u) \right\|_{L^p} + \|\zeta_k(\rho_k * u_{x_i}) - u_{x_i}\|_{L^p} \\
&\leqslant \left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(\rho_k * u) \right\|_{L^p} + \|\zeta_k(\rho_k * u_{x_i} - u_{x_i})\|_{L^p} + \|\zeta_k u_{x_i} - u_{x_i}\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme de la somme va tendre vers 0 par ce qu'on a fait au tout début de la preuve. Il nous faut encore un peu travailler sur les deux premiers. Premièrement, par définition des suites troncantes (Définition 3.18, page 20), on a que $\zeta_k(x) = \zeta\left(\frac{x}{k}\right)$. Ainsi,

$$\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_{x_j}\left(\frac{x}{k}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{x_j}{k}\right] = \frac{1}{k}\zeta_{x_i}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Mais, comme $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a que $\zeta_{x_i} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, la fonction ζ_{x_i} est bornée. On obtient donc

$$\left| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(x) \right| = \left| \frac{1}{k}\zeta_{x_i}\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leqslant \frac{1}{k}\|\zeta_{x_i}\|_{L^\infty}.$$

On obtient donc une première estimation pour le premier terme de la somme :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(\rho_k * u) \right\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(x)(\rho_k * u)(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{k}\|\zeta_{x_i}\|_{L^\infty}(\rho_k * u)(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \frac{1}{k}\|\zeta_{x_i}\|_{L^\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\rho_k * u)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \frac{1}{k}\|\zeta_{x_i}\|_{L^\infty} \|\rho_k * u\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Mais, en utilisant encore l'estimation donnée par le théorème 3.11, page 16, on a

$$\left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}(\rho_k * u) \right\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{k}\|\zeta_{x_i}\|_{L^\infty} \underbrace{\|\rho_k\|_{L^1}}_{=1} \|u\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{k}\|\zeta_{x_i}\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

Il nous reste donc plus qu'à montrer que le terme $\|\zeta_k(\rho_k * u_{x_i} - u_{x_i})\|_{L^p}$ va tendre vers 0. Puisque $0 \leqslant \zeta_k \leqslant 1$, on a

$$\|\zeta_k(\rho_k * u_{x_i} - u_{x_i})\|_{L^p} \leqslant \|\rho_k * u_{x_i} - u_{x_i}\|_{L^p}$$

et, à nouveau par le théorème 5.6, page 47, on obtient que ce terme va tendre vers 0.

Ceci finit la preuve car cela montre que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}[\zeta_k(\rho_k * u)] - u_{x_i} \right\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

□

Remarque 3.21.
Ce lemme motive les définitions de suite régularisante et suite troncante dans le cadre des espaces de Sobolev. Néanmoins, on a exactement le même résultat dans les espaces de Lebesgue :

Soient $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(\rho_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite régularisante et $(\zeta_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite troncante. Alors,

$$\zeta_k(\rho_k * f) \longrightarrow f$$

dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Pour montrer ceci, on utilise les arguments dans la démonstration du lemme 3.20 ci-dessus.

Théorème 3.22 (Théorème de Friedrichs)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p < \infty$, et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, il existe une suite $\left(u^k\right)_{k=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que

(*i*) $\left.u^k\right|_{\Omega}$ *converge vers u dans $L^p(\Omega)$,*

(*ii*) *pour tout $\omega \subset \Omega$ dont l'adhérence est compacte et inclue dans Ω, $\left.u^k\right|_{\omega}$ converge vers u dans $W^{1,p}(\omega)$.*

Démonstration. On note le prolongement de u sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que $\overline{u} = \overline{u}\chi_{\Omega}$.

De plus, on a que $\overline{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}\chi_{\Omega}|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}|^p \chi_{\Omega} = \int_{\Omega} |\overline{u}|^p = \int_{\Omega} |u|^p < \infty,$$

car $u \in L^p(\Omega)$.

On voudrait utiliser le lemme 3.20, page 22, mais, $\overline{u}$, n'est (en général) pas dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Cela vient du fait que les fonctions à support compact dans $\mathbb{R}^n$ peuvent parfaitement avoir un support qui n'est pas forcément contenu dans Ω. On ne peut donc pas utiliser la dérivabilité faible de u. Néanmoins, on peut déjà appliquer la remarque 3.21, page 24.

Soient $(\rho_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite régularisante et $(\zeta_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite troncante. Posons $u^k = \zeta_k(\rho_k * \overline{u})$. Alors, comme $\overline{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a

$$u^k = \zeta_k(\rho_k * \overline{u}) \longrightarrow \overline{u}$$

dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Et donc

$$\left.u^k\right|_{\Omega} \longrightarrow \overline{u}|_{\Omega} = u$$

dans $L^p(\Omega)$, ce qui établi une partie du résultat.

Soit maintenant $\omega \subset \Omega$ un ouvert dont l'adhérence est compacte et inclue dans Ω. On va maintenant introduire une fonction qui va rendre $\overline{u}$ dérivable au sens faible. Soit donc $\alpha \in C_0^1(\Omega)$ telle qu'il existe un ouvert V tel que $\overline{\omega} \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$, $\overline{V}$ est compact et $\alpha = 1$ sur V. On a $\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. En effet, pour tout $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\alpha u}\varphi_{x_i} = \int_{\Omega} \alpha u \varphi_{x_i}.$$

Or, comme $\alpha \in C_0^1(\Omega)$, on a que $\frac{\partial(\alpha\varphi)}{\partial x_i} = \alpha_{x_i}\varphi + \alpha\varphi_{x_i}$. Ainsi, $\alpha\varphi_{x_i} = \frac{\partial(\alpha\varphi)}{\partial x_i} - \alpha_{x_i}\varphi$. D'où, il vient,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\alpha u}\varphi_{x_i} &= \int_\Omega u\left(\frac{\partial(\alpha\varphi)}{\partial x_i} - \alpha_{x_i}\varphi\right) \\ &= \int_\Omega u\frac{\partial(\alpha\varphi)}{\partial x_i} - \int_\Omega \alpha_{x_i}u\varphi. \end{aligned}$$

De plus, comme $\alpha\varphi \in C_0^1(\Omega)$, on peut utiliser le fait que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\alpha u}\varphi_{x_i} &= -\int_\Omega u_{x_i}\alpha\varphi - \int_\Omega \alpha_{x_i}u\varphi \\ &= -\int_\Omega (u_{x_i}\alpha + \alpha_{x_i}u)\varphi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \overline{(u_{x_i}\alpha + u\alpha_{x_i})}\varphi, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que $\frac{\partial(\overline{\alpha u})}{\partial x_i} = \overline{(u_{x_i}\alpha + u\alpha_{x_i})}$. Ainsi, par le lemme 3.20, page 22, on a que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\zeta_k(\rho_k * \overline{\alpha u})] \longrightarrow \overline{(\alpha_{x_i}u + \alpha u_{x_i})}$$

dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant, montrons qu'à partir d'un certain rang k_0, $\rho_k * \overline{u}$ et $\rho_k * \overline{\alpha u}$ coïncident sur ω. Pour cela, on va montrer que le support de la fonction $\rho_k * \overline{u} - \rho_k * \overline{\alpha u}$ est inclu dans ω^c. On a par la proposition 3.12, page 17 que

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\rho_k * \overline{u} - \rho_k * \overline{\alpha u}) &= \operatorname{supp}[\rho_k * (1-\overline{\alpha})\overline{u}] \\ &\subset \overline{\operatorname{supp}\rho^k + \operatorname{supp}(1-\overline{\alpha})\overline{u}} \\ &\subset \overline{B\left(0, \frac{1}{k}\right) + \operatorname{supp}(1-\overline{\alpha})}. \end{aligned}$$

On a que le support de $1-\overline{\alpha}$ est inclu dans V^c. Et comme l'adhérence de ω est conpacte dans V, on a que $\operatorname{dist}(\omega, V^c) > 0$, et donc prenant k_0 tel que $\frac{1}{k_0} < \operatorname{dist}(\omega, V^c)$, on a que $\overline{B\left(0, \frac{1}{k}\right) + \operatorname{supp}(1-\overline{\alpha})} \subset \omega^c$ pour tout $k \geqslant k_0$. Ainsi, à partir du rang k_0, $u^k\Big|_\omega = \zeta_k(\rho_k * \overline{\alpha u})|_\omega$ et donc,

$$u^k_{x_i}\Big|_\omega = \frac{\partial}{\partial x_i}[\zeta_k(\rho_k * \overline{\alpha u})]\Big|_\omega \longrightarrow \overline{(\alpha_{x_i}u + \alpha u_{x_i})}\Big|_\omega.$$

Puisque $\alpha = 1$ et $\alpha_{x_i} = 0$ sur ω, ceci montre que

$$u^k_{x_i}\Big|_\omega \longrightarrow \overline{u_{x_i}}|_\omega = u_{x_i}|_\omega$$

et fini la démonstration du théorème. □

Remarque 3.23.
Le théorème de Friedrichs ne répond malhereusement pas à nos attentes de façon optimale. On aimerait bien avoir l'existence d'un suite $\left(v^k\right)_{k=0}^{\infty} \subset C^\infty(\Omega)$ telle que $v^k \longrightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Le problème dans le théorème de Friedrichs est la façon dont on étend notre fonction sur $\mathbb{R}^n$; étendre une fonction par 0 en dehors de son domaine est une façon un peu «naïve» d'étendre les fonctions. Une autre idée serait d'étendre notre fonction de façon régulière. Mais on ne peut pas le faire sans supposer un minimum de régularité sur le domaine Ω, ce qui est l'objet du théorème suivant ; théorème donné sans démonstration.

Théorème 3.24 (Théorème d'extension)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont le bord est de classe C^1, $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert tel que $\overline{\Omega} \subset V$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, il existe $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que

(*i*) $v|_{\Omega} = u$ *presque partout,*

(*ii*) $\mathrm{supp} v \subset V$,

(*iii*) *il existe une contante $C = C(p, \Omega, V)$ telle que*

$$\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

Démonstration. Pour une démonstration se référer au Evans [4, p. 254] □

Théorème 3.25.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont le bord est de classe C^1, $1 \leqslant p < \infty$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, il existe une suite $\left(v^k\right)_{k=0}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\left. v^k \right|_{\Omega} \longrightarrow u,$$

dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Posons $V = \cup_{x\in\Omega} B(x,1)$ qui est borné et qui contient l'adhérence de Ω. Par le théorème d'extension, il existe une fonction $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que $v|_{\Omega} = u$ presque partout et $\mathrm{supp} v \subset V$. Ainsi, v a un support compact. Considérons encore $(\rho_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite régularisante. Posons

$$v^k = (\rho_k * v) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) .$$

Par le lemme 3.20, page 22, on a que $v^k \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et que $v^k \longrightarrow v$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, on a

$$\left. v^k \right|_{\Omega} \longrightarrow v|_{\Omega} = u$$

dans $W^{1,p}(\Omega)$, ce qui montre le résultat voulu.

□

Remarque 3.26.
Lorsqu'on regarde la démonstration du théorème ci-dessus, en se rend compte qu'on a plus que cela. En effet, on a que $v^k \longrightarrow v$ en plus de $\left. v^k \right|_{\Omega} \longrightarrow u$.

Nous aurons besoin plus tard de ce fait-ci.

3.4 Propriétés

Proposition 3.27.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Alors, $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Il suffit de montrer que $W^{1,p}(\Omega)$ est complet.

Considérons $\left(u^k\right)_{k=0}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|u^k - u^l\right\|_{W^{1,p}} = \left\|u^k - u^l\right\|_{L^p} + \sum_{i=0}^{n} \left\|u_{x_i}^k - u_{x_i}^l\right\|_{L^p} \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $k, l \geqslant N$.

De celà, on déduit très vite que $\left(u^k\right)_{k=0}^{\infty}$ et $\left(u_{x_i}^k\right)_{k=0}^{\infty}$ sont des suites de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. (Il suffit de prendre le même N, et on a le résultat.)

Ainsi, par complétude de $L^p(\Omega)$, on a qu'il existe $u, g_i \in L^p(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} u^k &\longrightarrow u \\ u_{x_i}^k &\longrightarrow g_i. \end{aligned}$$

Ou, en d'autres termes,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left\|u^k - u\right\|_{L^p} &= 0 \\ \lim_{k\to\infty} \left\|u_{x_i}^k - g_i\right\|_{L^p} &= 0. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que g_i est en réalité la dérivée au sens faible de u par rapport à x_i. Soit $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\varphi_{x_i} &= \int_\Omega \left(u - u^k\right)\varphi_{x_i} + \int_\Omega u^k \varphi_{x_i} \\ &= \int_\Omega \left(u - u^k\right)\varphi_{x_i} - \int_\Omega u_{x_i}^k \varphi \\ &= \int_\Omega \left(u - u^k\right)\varphi_{x_i} - \int_\Omega \left(u_{x_i}^k - g_i\right)\varphi - \int_\Omega g_i\varphi. \end{aligned}$$

Or, on a qu'en passant à la limite les deux termes dépendant de k vont tendre vers 0. En effet, par l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page 47), on a :

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \left(u - u^k\right)\varphi_{x_i}\right| &\leqslant \int_\Omega \left|\left(u - u^k\right)\varphi_{x_i}\right| = \left\|\left(u - u^k\right)\varphi_{x_i}\right\|_{L^1} \leqslant \left\|u^k - u\right\|_{L^p} \left\|\varphi_{x_i}\right\|_{L^{p'}} \longrightarrow 0 \\ \left|\int_\Omega \left(u_{x_i}^k - g_i\right)\varphi\right| &\leqslant \int_\Omega \left|\left(u_{x_i}^k - g_i\right)\varphi\right| = \left\|\left(u_{x_i}^k - g_i\right)\varphi\right\|_{L^1} \leqslant \left\|u_{x_i}^k - g_i\right\|_{L^p} \left\|\varphi\right\|_{L^{p'}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où p' est l'exposant conjugué de p.

Ainsi, on a :

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi.$$

Et donc, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\left(u^k\right)_{k=0}^{\infty}$ converge vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$. □

Proposition 3.28 (Caractérisation des espaces $W^{1,p}(\Omega)$)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 < p \leqslant \infty$ et $u \in L^p(\Omega)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) $u \in W^{1,p}(\Omega)$

(*ii*) *Il existe une constante* $C \in \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$ *et* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*, on a*

$$\left| \int_\Omega u\varphi_{x_i} \right| \leqslant C \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

(*iii*) *Il existe une constante* $C \in \mathbb{R}$ *telle que pour tout ouvert* $\omega \subset \Omega$ *dont l'adhérence est compacte et inclue dans* Ω *et tout* $h \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$*, on a*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant C|h|$$

où $\tau_h u : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est défini par* $\tau_h u(x) = u(x+h)$*.*

Démonstration. On fera la démonstration en quatre étapes, en montrant l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ puis, en montrant $(i) \Rightarrow (iii)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Commençons par $(i) \Rightarrow (ii)$:

Il s'agit d'une application quasi imédiate de l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page 47). En effet, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\left| \int_\Omega u\varphi_{x_i} \right| = \left| \int_\Omega u_{x_i}\varphi \right| \leqslant \|u_{x_i}\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Prenant donc $C = \|u_{x_i}\|_{L^p}$, on obtient le résultat cherché.

Montrons maintenant $(ii) \Rightarrow (i)$:

Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Considérons la forme linéaire $F_i : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F_i(\varphi) = \int_\Omega u\varphi_{x_i}.$$

On a que F_i est uniformément continue, lorsqu'on muni $C_0^\infty(\Omega)$ de la norme de $L^{p'}(\Omega)$. En effet, elle est en fait lipschitz-continue de constante C : pour tout $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$|F_i(\varphi) - F_i(\psi)| = \left| \int_\Omega u\varphi_{x_i} - \int_\Omega u\psi_{x_i} \right| = \left| \int_\Omega u(\varphi_{x_i} - \psi_{x_i}) \right| \leqslant C\|\varphi - \psi\|_{L^{p'}}.$$

Comme F_i est uniformément continue et définie sur un sous ensemble dense de $L^{p'}(\Omega)$ (remarquons ici que $1 \leqslant p' < \infty$), on peut, par la proposition 5.13, page 49, la prolonger par continuité sur tout $L^{p'}(\Omega)$.

Ainsi, F_i satisfait les hypothèses du théorème de représentation de Riesz (théorème 5.11 si $p \neq \infty$ et théorème 5.12 sinon, page 49) et il existe donc une fonction $g_i \in L^p(\Omega)$ telle que $F_i(\varphi) = \int_\Omega g_i\varphi$. Et donc

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} = F_i(\varphi) = \int_\Omega g_i\varphi.$$

Ce qui montre que $-g_i = v_{x_i}$ et donc que $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Montrons maintenant $(i) \Rightarrow (iii)$.

Commençons par supposer en plus que $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $p < \infty$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Définissons $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$v(t) = u(x+th).$$

Alors,

$$v'(t) = \sum_{j=1}^n u_{x_j}(x+th) \frac{\partial}{\partial t}[x_j + th_j] = \sum_{j=1}^n u_{x_j}(x+th) h_j = \langle \nabla u(x+th), h \rangle$$

et donc

$$u(x+h)-u(x)=v(1)-v(0)=\int_0^1 v'(t)\,dt=\int_0^1 \langle \nabla u(x+th),h\rangle\,dt.$$

Ce qui nous mène à

$$|\tau_h u(x)-u(x)|^p=|u(x+h)-u(x)|^p\leqslant\left(\int_0^1 |\langle \nabla u(x+th),h\rangle|\,dt\right)^p.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\tau_h u(x)-u(x)|^p\leqslant|h|^p\left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)|\,dt\right)^p.$$

La fonction $x\longmapsto x^p$ étant convexe, on peut appliquer l'inégalité de Jensen (thèorème 5.5, page 47), ce qui nous mène à

$$|\tau_h u(x)-u(x)|^p\leqslant|h|^p\int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p\,dt.$$

Soit maintenant $\omega\subset\Omega$ un ouvert dont l'adhérence est compacte et $h<\operatorname{dist}(\omega,\Omega^c)$. On a

$$\begin{aligned}\int_\omega |\tau_h u(x)-u(x)|^p\,dx &\leqslant \int_\omega |h|^p\int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p\,dtdx\\ &\leqslant |h|^p\int_0^1\int_\omega |\nabla u(x+th)|^p\,dxdt\\ &\leqslant |h|^p\int_0^1\int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^p\,dydt.\end{aligned}$$

Considérons maintenant un ouvert $\tilde\omega$ dont l'adhérence est compacte et tel que pour tout $0\leqslant t\leqslant 1$, $\omega+th\subset\tilde\omega\subset\overline{\tilde\omega}\subset\Omega$. Par exemple prenons $\tilde\omega=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1}(\omega+th)$, qui est ouvert en tant qu'union d'ouverts et qui est borné. Le fait que son adhérence est bien contenue dans Ω vient du fait que $h<\operatorname{dist}(\omega,\Omega^c)$ est fixé. On obtient ainsi,

$$\int_\omega |\tau_h u(x)-u(x)|^p\leqslant|h|^p\int_0^1\int_{\tilde\omega} |\nabla u(y)|^p\,dydt=|h|^p\int_{\tilde\omega}|\nabla u(y)|^p\,dy.$$

D'où,

$$\|\tau_h u-u\|_{L^p(\omega)}\leqslant\left(|h|^p\int_{\tilde\omega}|\nabla u(y)|^p\,dy\right)^{\frac1p}=|h|\left(\int_{\tilde\omega}|\nabla u(y)|^p\,dy\right)^{\frac1p}. \tag{4}$$

Remarquons que ceci ne montre pas le résultat pour le cas des fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet, ici, la constante $\left(\int_{\tilde\omega}|\nabla u(y)|^p\,dy\right)^{\frac1p}$ dépend de h car $\tilde\omega$ dépend de h. Néanmoins, on peut encore majorer notre expression en remplaçant $\tilde\omega$ par Ω. Ainsi, on obtiendrait une constante indépendante de h. Néanmoins, on a besoin de l'estimation (4), qui est plus fine, pour le cas général. C'est pour cela qu'on s'arrête à ce point dans le cas des fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Adandonnons maintenant l'hypothèse que $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, pour revenir à l'hypothèse $u\in W^{1,p}(\Omega)$. Dans ce cas, on introduit à l'aide du théorème de Friedrichs (théorème 3.22, page 24) une suite de fonctions $\left(u^k\right)_{k=0}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que $u^k\Big|_{\Omega} \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ et pour tout ouvert $w \subset \Omega$ dont l'adhérence est compacte et inclue dans Ω, $u^k_{x_i}\Big|_{\omega} \longrightarrow u_{x_i}|_{\omega}$ dans $L^p(\omega)$.

Fixons donc $\omega \subset \Omega$ un ouvert dont l'adhérence est compacte et inclue dans Ω. Alors, par ce qu'on a fait ci-dessus, il existe un autre ouvert $\tilde{\omega} \subset \Omega$ dont l'adhérence est compacte et inclue dans Ω tel que

$$\left\|\tau_h u^k - u^k\right\|_{L^p(\omega)} \leqslant |h| \left(\int_{\tilde{\omega}} \left|\nabla u^k(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui nous mène à

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} &\leqslant \left\|\tau_h u - \tau_h u^k\right\|_{L^p(\omega)} + \left\|\tau_h u^k - u^k\right\|_{L^p(\omega)} + \left\|u^k - u\right\|_{L^p(\omega)} \\ &\leqslant \left\|\tau_h u - \tau_h u^k\right\|_{L^p(\omega)} + |h| \left(\int_{\tilde{\omega}} \left|\nabla u^k(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} + \left\|u^k - u\right\|_{L^p(\omega)}. \quad (5) \end{aligned}$$

Par les propriétés de la suite $\left(u^k\right)_{k=0}^{\infty}$, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - \tau_h u\|_{L^p(\omega)} = \left\|u - u^k\right\|_{L(\omega+h)} \leqslant \left\|u - u^k\right\|_{L^p(\Omega)} &\longrightarrow 0 \\ \left\|u^k - u\right\|_{L^p(\omega)} \leqslant \left\|u^k - u\right\|_{L^p(\Omega)} &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarquons de plus que puisque pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\left\|u^k_{x_i} - u_{x_i}\right\|_{L^p(\tilde{\omega})} \longrightarrow 0$, alors, $\left\|\left|\nabla u^k - \nabla u\right|\right\|_{L^p(\tilde{\omega})} \longrightarrow 0$. En effet, $|x| \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Ainsi,

$$\left\|\left|\nabla u^k - \nabla u\right|\right\|_{L^p(\tilde{\omega})} \leqslant \sqrt{n} \left\|\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|u^k_{x_i} - u_{x_i}\right|\right\|_{L^p(\tilde{\omega})} \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\|u^k_{x_i} - u_{x_i}\right\|_{L^p(\tilde{\omega})} \longrightarrow 0.$$

Et donc, on obtient que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\tilde{\omega}} \left|\nabla u^k(y)\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} &= \left\|\left|\nabla u^k\right|\right\|_{L^p(\tilde{\omega})} \\ &\leqslant \left\|\left|\nabla u^k - \nabla u\right| + |\nabla u|\right\|_{L^p(\tilde{\omega})} \\ &\leqslant \left\|\left|\nabla u^k - \nabla u\right|\right\|_{L^p(\tilde{\omega})} + \||\nabla u|\|_{L^p(\tilde{\omega})} \longrightarrow \||\nabla u|\|_{L^p(\tilde{\omega})}. \end{aligned}$$

Et donc, en reprenant notre estimation (5) et en passant à la limite, on trouve

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant |h| \, \||\nabla u|\|_{L^p(\tilde{\omega})} \leqslant |h| \, \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)}. \quad (6)$$

Posant $C = \||\nabla u|\|_{L^p(\Omega)}$, on trouve le résultat voulu.

Maintenant, regardons encore ce qu'il se passe dans le cas $p = \infty$. Pour cela, on utilise la proposition 5.8, page 48 dans l'équation (6). En effet, comme ω et $\tilde{\omega}$ sont bornés, on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^\infty(\omega)} = \lim_{p \to \infty} \|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant \lim_{p \to \infty} |h| \, \||\nabla u|\|_{L^p(\tilde{\omega})} = |h| \, \||\nabla u|\|_{L^\infty(\tilde{\omega})} \leqslant |h| \, \||\nabla u|\|_{L^\infty(\Omega)},$$

ce qui montre le résultat voulu.

Pour finir la preuve, il ne nous reste plus qu'à montrer la dernière implication, à savoir $(iii) \Rightarrow (ii)$. Soit donc $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ quelconque et fixons un ouvert $\omega \subset \Omega$ dont l'adhérence est compacte, contenue dans Ω et tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset \omega$. Soit encore $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$.

On a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(y)(\varphi(y-h)-\varphi(y))\,dy &= \int_\Omega u(y)\varphi(y-h)\,dy - \int_\Omega u\varphi(y)\,dy \\
&= \int_{\operatorname{supp}\varphi+h} u(y)\varphi(y-h)\,dy + \int_{\operatorname{supp}\varphi} u(y)\varphi(y)\,dy \\
&= \int_{\operatorname{supp}\varphi} u(x+h)\varphi(x)\,dx + \int_{\operatorname{supp}\varphi} u(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_\omega (u(x+h)-u(x))\varphi(x)\,dx \\
&= \int_\omega (\tau_h u - u)\varphi.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page47),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|h|}\left|\int_\Omega u(y)(\varphi(y-h)-\varphi(y))\,dy\right| &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_\omega |\tau_h u - u|\,|\varphi| \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\omega)}.
\end{aligned}$$

Appliquant notre hypothèse, on trouve,

$$\frac{1}{|h|}\left|\int_\Omega u(y)(\varphi(y-h)-\varphi(y))\,dy\right| \leqslant \frac{1}{|h|}C|h|\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\omega)} = C\|\varphi\|_{L^{p'}(\omega)} = C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Prenant maintenant $h = -te^i$, avec $|t| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u(y)\frac{\varphi(y+te^i)-\varphi(y)}{t}dy\right| &= \left|\int_\Omega u(y)\frac{\varphi(y+te^i)-\varphi(y)}{-t}dy\right| \\
&= \frac{1}{|t|}\left|\int_\Omega u(y)\left(\varphi\left(y+te^i\right)-\varphi(y)\right)dy\right| \\
&\leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On voudrait maintenant faire tendre t vers 0 et permuter limite et intégrale. Comme d'habitude, on majore notre intégrande par $\|\varphi_{x_i}\|_{L^\infty(\Omega)}|u|$ à l'aide du théorème des accroissements finis, et on en conclut par le théorème de la convergence dominée (théorème 5.1, page 47)

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u\varphi_{x_i}\right| &= \left|\int_\Omega u(y)\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(y+te^i)-\varphi(y)}{t}dy\right| \\
&= \lim_{t\to\infty}\left|\int_\Omega u(y)\frac{\varphi(y+te^i)-\varphi(y)}{t}dy\right| \\
&\leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},
\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

□

4 Inclusion des espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder

4.1 Inclusion en dimension quelconque

Théorème 4.1 (Inégalité de Morrey)**.**
Soient $n < p \leqslant \infty$ et $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$. Alors, il existe une constante $C = C(p, n)$ telle que pour tout $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} .$$

Démonstration. Dans la démonstration, on distingue le cas où p est fini du cas où p est infini. On va commencer par le cas où p est infini, car il est plus simple. En effet, il s'agit d'une application du théorème des accroissements finis. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, on a que pour tous $x, y \in \Omega$, il existe $\xi = \xi(x, y) \in \mathbb{R}^n$ tel quel

$$u(x) - u(y) = \langle \nabla u(\xi), x - y \rangle .$$

Si maintenant on suppose x et y différents, on obtient à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} = \frac{|\langle \nabla u(\xi), x - y \rangle|}{|x - y|} \leqslant \frac{|\nabla u(\xi)| \, |x - y|}{|x - y|} \leqslant \sum_{i=0}^{n} |u_{x_i}(\xi)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^\infty} .$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)} &= \|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} + [u]_{1,\mathbb{R}^n} \\ &= \|u\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \\ &\leqslant \|u\|_{L^\infty} + \sum_{i=0}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^\infty} = \|u\|_{W^{1,\infty}} , \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Supposons maintenan $p < \infty$ et considérons $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. La démonstration se fera en quatre étapes clés.

Etape 1*.* La première étape consiste à montrer l'estimation suivante : Il existe une constante c_1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, on a

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, dy \leqslant c_1 \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy, \tag{7}$$

où ω_n est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. Et donc, $\omega_n r^n$ est le volume de la boule de rayon r dans $\mathbb{R}^n$.

Soient donc $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ quelconques. On a pour $w \in \partial B(0, 1)$ et $s \in]0, r[$,

$$\begin{aligned} |u(x + sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} [u(x + tw)] \, dt \right| \\ &= \left| \int_0^s \langle \nabla u(x + tw), w \rangle \, dt \right| \\ &\leqslant \int_0^s |\langle \nabla u(x + tw), w \rangle| \, dt. \end{aligned}$$

Utilisant maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve $|\langle \nabla u (x + tw), w\rangle| \leqslant |\nabla u (x + tw)| |w| = |\nabla u (x + tw)|$ car $w \in \partial B (0, 1)$. Et donc,

$$|u (x + sw) - u (x)| \leqslant \int_0^s |\nabla u (x + tw)| dt.$$

Intégrant maintenant sur la sphère $\partial B (0, 1)$ par rapport à w, on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,1)} |u (x + sw) - u (x)| dS_w &\leqslant \int_{\partial B(0,1)} \int_0^s |\nabla u (x + tw)| dtdS_w \\
&= \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |\nabla u (x + tw)| dS_w dt.
\end{aligned}$$

Utilisant maintenant la proposition 5.14, page 50, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,1)} |u (x + sw) - u (x)| dS_w &\leqslant \int_0^s \int_{B(0,t)} \frac{|\nabla u (x + w)|}{t^{n-1}} dS_w dt \\
&= \int_0^s \int_{B(0,t)} \frac{|\nabla u (x + w)|}{|w|^{n-1}} dS_w dt \\
&= \int_{B(0,s)} \frac{|\nabla u (x + w)|}{|w|^{n-1}} dw.
\end{aligned}$$

Effectuant ici le changement de variables $y = x + w$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,1)} |u (x + sw) - u (x)| dS_w &\leqslant \int_{B(x,s)} \frac{|\nabla u (y)|}{|x - y|^{n-1}} dy \\
&= \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u (y)|}{|x - y|^{n-1}} dy.
\end{aligned}$$

Maintenant, amplifions notre équation par s^{n-1} et intégrons de 0 à r par rapport à s. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} |u (x + sw) - u (x)| dS_w ds &\leqslant \int_0^r s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{\nabla u (y)}{|x - y|^{n-1}} dyds \\
&= \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{\nabla u (y)}{|x - y|^{n-1}} dy.
\end{aligned}$$

Calculons le membre de gauche. Par la proposition 5.14, page 50, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^r s^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} |u (x + sw) - u (x)| dS_w ds &= \int_0^r \int_{\partial B(0,s)} |u (x + w) - u (x)| dS_w ds \\
&= \int_{B(0,r)} |u (x + w) - u (x)| dw.
\end{aligned}$$

Effectuant le changement de variables $y = x + w$, on trouve,

$$\int_0^r s^{n-1}\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw)-u(x)|\,dS_w ds = \int_{B(x,r)} |u(y)-u(x)|\,dy.$$

Injectant ce calcul dans notre dernière estimation, on trouve

$$\int_{B(x,r)} |u(y)-u(x)|\,dy \leqslant \frac{r^n}{n}\int_{B(x,r)} \frac{\nabla u(y)}{|x-y|^{n-1}}dy$$
$$\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r)} |u(y)-u(x)|\,dy \leqslant \frac{1}{n\omega_n}\int_{B(x,r)} \frac{\nabla u(y)}{|x-y|^{n-1}}dy.$$

Prenant donc $c_1 = \frac{1}{n\omega_n}$, on trouve le résultat voulu.

Etape 2. Notre objectif maintenant est de montrer l'estimation suivante : Il existe une constante c_2 telle que

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_2 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{8}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. On a

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \frac{1}{\omega_n}\int_{B(x,1)} |u(x)|\,dy \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{B(x,1)} |u(x)-u(y)+u(y)|\,dy \\
&\leqslant \frac{1}{\omega_n}\int_{B(x,1)} |u(x)-u(y)|\,dy + \frac{1}{\omega_n}\int_{B(x,1)} |u(y)|\,dy \\
&\overset{(7)}{\leqslant} c_1\int_{B(x,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}}dy + \left(\left(\frac{1}{\omega_n}\int_{B(x,1)} |u(y)|\,dy\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

A ce point, on va utiliser l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page 47) pour le premier terme de la somme et l'inégalité de Jensen (théorème 5.5, page 47) pour le deuxième terme de la somme. Ceci nous mène au résultat

$$|u(x)| \leqslant c_1 \||\nabla u|\|_{L^p(B(x,1))}\left(\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{p'(n-1)}}dy\right)^{\frac{1}{p'}} + \frac{1}{\omega_n^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Il faudra un peu travailler sur cette expression pour obtenir ce que l'on veut. Commençons par calculer $\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{p'(n-1)}}dy$. Effectuant le changement de variables $w = y - x$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{p'(n-1)}} dy &= \int_{B(0,1)} \frac{1}{|w|^{p'(n-1)}} dw \\
&= \int_0^1 \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{r^{p'(n-1)}} dS_w dr \\
&= \int_0^1 \frac{1}{r^{p'(n-1)}} \underbrace{\int_{\partial B(0,r)} dS_w}_{\omega_n r^{n-1}} dr \\
&= \int_0^1 \omega_n \frac{r^n}{r^{p'(n-1)}} dr \\
&= \omega_n \int_0^1 r^{n-1-(n-1)\frac{p}{p-1}} dr.
\end{aligned}$$

Regardons l'exposant de r d'un peu plus près. On a : $n-1-(n-1)\frac{p}{p-1} = \frac{(n-1)(p-1)-np+p}{p-1} = \frac{1-n}{p-1} = -\frac{n-1}{p-1}$. Or, comme $n < p$, $\frac{n-1}{p-1} < 1$. D'ou, $n-1-(n-1)\frac{p}{p-1} > -1$. Ainsi, on obtient

$$\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{p'(n-1)}} dy = \omega_n \left[r^{n-(n-p)\frac{p}{p-1}} \right]_{r=0}^{r=1} = \omega_n.$$

Ainsi, notre équation (9) devient

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leqslant c_1 \omega_n \| |\nabla u| \|_{L^p(B(x,1))} + \frac{1}{\omega_n} \left(\int_{B(x,1)} |u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant c_1 \omega_n \| |\nabla u| \|_{L^p(B(x,1))} + \frac{1}{\omega_n} \|u\|_{L^p(B(x,1))} \\
&\leqslant c_1 \omega_n \| |\nabla u| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{\omega_n} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .
\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise le fait que $|\nabla u| \leqslant \sum_{i=0}^n |u_{x_i}|$. Utilisant donc l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|u(x)| \leqslant c_1 \omega_n \sum_{i=0}^n \|u_{x_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{\omega_n} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Ainsi, prenant $c_2 = \max\left(c_1\omega_n, \frac{1}{\omega_n}\right)$, on obtient le résultat voulu.

Etape 3. Notre objectif est maintenant de montrer qu'il existe une constante c_3 telle que

$$[u]_{\gamma,\mathbb{R}^n} \leqslant c_3 \| |\nabla u| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Posons $r = |x-y|$, $W = B(x,r) \cap B(y,r)$. On a

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &= \frac{1}{|W|} \int_W |u(x) - u(y)| \, dz \\
&\leqslant \frac{1}{|W|} \int_W |u(x) - u(z)| \, dz + \frac{1}{|W|} \int_W |u(z) - u(y)| \, dz. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux termes de notre somme séparément. On a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|W|}\int_W |u(x)-u(z)|\,dz &= \underbrace{\frac{|B(x,r)|}{|W|}}_{\leqslant 1}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_W |u(x)-u(z)|\,dz \\
&\leqslant \frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)} |u(x)-u(z)|\,dz \\
&\overset{(7)}{\leqslant} c_1\int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{n-1}}dz.
\end{aligned}
$$

Utilisant maintenant l'inégalité de Hölder (théorème 5.4 page 47), on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|W|}\int_W |u(x)-u(z)|\,dz &\leqslant c_1 \left\||\nabla u|\right\|_{L^p(B(x,r))}\left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-z|^{p'(n-1)}}dz\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leqslant c_1 \left\||\nabla u|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-z|^{p'(n-1)}}dz\right)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant $\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-z|^{p'(n-1)}}dz$. On a

$$
\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-z|^{p'(n-1)}}dz &= \int_{B(0,r)} \frac{1}{|w|^{p'(n-1)}}dw \\
&= \int_0^r\int_{\partial B(0,t)} \frac{1}{t^{p'(n-1)}}dS_w dt \\
&= \omega_n\int_0^r t^{n-1-p'(n-1)}dt \\
&= \omega_n\int_0^r t^{\frac{(n-1)(p-1)-p(n-1)}{p-1}}dt \\
&= \omega_n\frac{p-1}{p-n}\left[t^{\frac{p-n}{p-1}}\right]_{t=0}^{t=r} \\
&= \omega_n\frac{p-1}{p-n}r^{\frac{p-n}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on peut reprendre notre calcul,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|W|}\int_W |u(x)-u(z)|\,dz &\leqslant c_1 \left\||\nabla u|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}r^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leqslant c_1\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left\||\nabla u|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} r^{\frac{p-n}{p}} \\
&\leqslant c_1\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left\||\nabla u|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |x-y|^{\gamma}
\end{aligned}
$$

Posant donc $c_3 = 2c_1\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p-1}{p}}$, on obtient, en reprenant notre équation (10),

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leqslant 2c_1\left(\omega_n\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left\||\nabla u|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |x-y|^{\gamma} \\
&\leqslant c_3\left\||\nabla u|\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |x-y|^{\gamma}.
\end{aligned}
$$

Comme x et y sont quelconques, cela montre l'estimation voulue.
Etape 4. Nous sommes maintenant en mesure de conclure. Posons $C = 2\max(c_2, c_3)$. On a par les étapes 2 et 3,

$$\begin{array}{rcl} \|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} & = & \|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} + [u]_{\gamma,\mathbb{R}^n} \\ & \leqslant & c_2 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + c_3 \||\nabla u|\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \leqslant & c_2 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + c_3 \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \leqslant & c_2 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + c_3 \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + c_3 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{2}C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \dfrac{1}{2}C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{array}$$

□

Théorème 4.2.
Soient Ω un ouvert borné dont le bord est de classe C^1, $n < p \leqslant \infty$, $\gamma = 1 - n/p$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors, il existe $v \in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que

(i) $u = v$ presque partout sur Ω,

(ii) il existe une constante $C = C(\Omega, n, p)$ telle que $\|v\|_{C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Démonstration. Dans la démonstration on distingue le cas où p est fini du cas où p est infini. Commençons donc par supposer que p est fini. Posons $V = \cup_{x\in\Omega} B(x, 1)$. Alors, comme Ω est régulier, on a par le théorème d'extension (théorème 3.24, page 26) qu'il existe $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\overline{u} = u$ presque partout sur Ω, supp$u \subset V$ et telle qu'il existe une constante $C_{ext} = C_{ext}(\Omega, V, n, p) = C_{ext}(\Omega, n, p)$ telle que

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{ext} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{11}$$

De plus, par le théorème 3.25 et la remarque 3.26, page 26, on a qu'il existe une suite $\left(v^k\right)_{k=0}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$v^k \longrightarrow \overline{u} \text{ dans } W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{12}$$

$$v^k\Big|_{\Omega} \longrightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega). \tag{13}$$

Comme $\left(v^k\right)_{k=0}^{\infty}$ est convergente, elle est de Cauchy dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|v^k - v^l\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $k, l \geqslant N_\varepsilon$. Or, par l'inégalité de Morrey (théorème 4.1, page 32), il existe une constante $C_{mor} = C_{mor}(n, p)$ telle que pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{mor} \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$. Ainsi, $\left(v^k\right)_{k=0}^{\infty}$ est également une suite de Cauchy dans $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ (pour $\varepsilon > 0$ donné, prendre comme rang $N_{\varepsilon/C_{mor}}$.) $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ étant complet, (théorème 2.9, page 7), il existe $u^* \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$v^k \longrightarrow u^* \text{ dans } C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n). \tag{14}$$

Posons $v = u^*|_{\Omega} \in C^{0,\gamma}(\Omega)$, et montrons qu'elle vérifie les conditions (i) et (ii). Commençons par (i). On a

$$\|v-u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \left\|v - v^k\big|_{\Omega}\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|v^k\big|_{\Omega} - u\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dans notre somme à droite, le deuxième terme va tendre vers 0 par (13). Si on montre que le premier terme va tendre vers 0 également, alors, on aura que la norme de $v-u$ dans $L^p(\Omega)$ sera égale à 0 et que donc $v=u$ presque partout sur Ω. Montrons donc que $\left\|v - v^k\big|_{\Omega}\right\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$. On a

$$\begin{aligned}
\left\|v - v^k\big|_{\Omega}\right\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} \left|v(x) - v^k(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_{\Omega} \sup_{y\in\Omega} \left|v(y) - v^k(y)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left\|v - v^k\big|_{\Omega}\right\|_{C(\overline{\Omega})} \left(\int_{\Omega} 1 dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left\|u^* - v^k\right\|_{C(\mathbb{R}^n)} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \overset{(14)}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

ce qui établit (i).

Montrons maintenant (ii). On a

$$\begin{aligned}
\|v\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} &\leqslant \|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant \left\|u^* - v^k\right\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} + \left\|v^k\right\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant \left\|u^* - v^k\right\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} + C_{mor}\left\|v^k\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant \left\|u^* - v^k\right\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} + C_{mor}\left\|v^k - \overline{u}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + C_{mor}\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\overset{(11)}{\leqslant} \left\|u^* - v^k\right\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} + C_{mor}\left\|v^k - \overline{u}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + C_{mor}C_{ext}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Or, par (14), on a que $\left\|u^* - v^k\right\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ et par (12), on a que $\left\|v^k - \overline{u}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$. Ainsi, passant à la limite, on obtient,

$$\|v\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant C_{mor}C_{ext}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

et donc, en prenant $C = C_{mor}C_{ext}$, on obtient (ii).

Ainsi, on a montré le théorème dans le cas où p est fini. Il nous faut maintenant voir ce qu'il se passe quand p est infini.

On a donc $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Comme Ω est borné, il existe une constante $M = M(\Omega)$ telle que $|x| \leqslant M$ pour tout $x \in \Omega$. Posons $V = B(0, M+1)$. Alors, $\overline{\Omega} \subset V$. Ainsi, par le théorème d'extension, il existe $\overline{u} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\overline{u}|_\Omega = u$ presque partout, $\mathrm{supp}\overline{u} \subset V$ et, il existe une constante $C_{ext} = C_{ext}(\Omega, n)$ telle que[*]

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_{ext} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} .$$

L'idée maintenant est de montrer que la classe d'équivalence de $\overline{u}$ admet un représentant continu.

On a $\overline{u}|_V \in W^{1,\infty}(V)$. Mais, comme V est borné, on a que $\overline{u}|_V \in W^{1,p}(V)$ pour tout $n < p < \infty$. On peut donc appliquer ce qu'on a fait dans le cas fini et il existe $w_p \in C^{0,1-\frac{n}{p}}\left(\overline{V}\right)$ telle que $w_p = \overline{u}|_V$ presque partout et telle qu'il existe une constante $C_{fini} = C_{fini}(V, n, p) = C_{fini}(\Omega, n, p)$ qui vérifie

$$\|w_p\|_{C(\overline{V})} \leqslant \|w_p\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{V})} \leqslant C_{fini} \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(V)} .$$

Fixons maintenant $p = n + 1$. Ceci nous permettera de rejeter la dépendance en p de la constante C_{fini} en une dépendance en n. Posons maintenant

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} w_p(x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que $\overline{w}$ est le représentant continu de la classe d'équivalence de $\overline{u}$. Il nous faut montrer plusieurs choses :

1. $\overline{w} = \overline{u}$, presque partout,
2. $\overline{w}$ est continue,
3. $\|\overline{w}\|_{C(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

Commençons par le point 1. On a $\overline{w} = \overline{u}$ presque partout sur V, car $w_p = \overline{u}|_V$ presque partout. De plus, comme $\mathrm{supp}\overline{u} \subset V$, on a que $\overline{u} = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^n \backslash V$. Et donc, par définition de $\overline{w}$, on a bien que $\overline{w} = \overline{u}$, presque partout.

Pour le point 2, on a déjà que w_p est continue et la fonction 0 est continue également. Il nous faut donc juste voir ce qu'il se passe sur ∂V. Or, comme $\mathrm{supp} w_p = \mathrm{supp}\overline{u} \subset V$, on a que pour tout $x_0 \in \partial V$, $\lim_{x \to x_0} w_p(x) = 0$. Et donc, $\overline{w}$ est contine.

Pour le point 3, on a

$$\|\overline{w}\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\overline{w}(x)| = \sup_{x \in V} |w_p(x)| = \|w_p\|_{C(\overline{V})} < \infty.$$

Et donc, on a montré qu'il existe un représentant continu de la classe d'équivalence de $\overline{u}$. Au lieu maintenant de travailler avec $\overline{w}$ et d'utiliser la transitivité de l'égalité presque partout, on va identifier $\overline{u}$ avec $\overline{w}$. C'est à dire qu'on suppose $\overline{u} \in C(\mathbb{R}^n)$ en plus de $\overline{u} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $(\rho_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite régularisante. Posons $v^k = \rho_k * \overline{u}$. On va montrer que $\left.v^k\right|_\Omega$ est Lipschitzienne d'une constante qui ne dépend pas de k. On a, pour tout $x, y \in \Omega$,

---

[*]. Remarquons que la dépendance en V de C_{ext} est rejetée sur une dépendance en Ω car V dépend de M qui dépend de Ω.

$$\begin{aligned}
\left|v^k(x) - v^k(y)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[v^k(tx + (1-t)y)\right] dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 \left\langle \nabla v^k(tx + (1-t)y), x - y\right\rangle dt\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \left|\left\langle \nabla v^k(tx + (1-t)y), x - y\right\rangle\right| dt.
\end{aligned}$$

Utilisant ici l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
\left|v^k(x) - v^k(y)\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\nabla v^k(tx + (1-t)y)\right| |x-y|\, dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n \left|v^k_{x_i}(tx + (1-t)y)\right|\right) |x-y|\, dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^n \left\|v^k_{x_i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) |x-y|\, dt \\
&= \left(\sum_{i=0}^n \left\|v^k_{x_i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) |x-y|.
\end{aligned}$$

Or, par la proposition 3.19, page 21, on a que $v^k_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}[\rho_k * \overline{u}] = \rho_k * \overline{u}_{x_i}$. Et, par suite, utilisant l'estimation donnée par le théorème 3.11, page 16, on trouve que $\left\|v^k_{x_i}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\rho_k * \overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\rho_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. Ainsi, reprenant notre estimation, on obtient,

$$\left|v^k(x) - v^k(y)\right| \leqslant \left(\sum_{i=0}^n \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) |x-y|,$$

ce qui montre que v^k est Lipschitz-continue de constante $\sum_{i=0}^n \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, qui ne dépend pas de k.

Posons maintenant $v = \overline{u}|_\Omega$, et montrons que v est la fonction cherchée. (i) découle des propriétés de $\overline{u}$. Il reste à voir (ii) *. On a, pour tous $x, y \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
|v(x) - v(y)| &\leqslant \left|v(x) - v^k(x)\right| + \left|v^k(x) - v^k(y)\right| + \left|v^k(y) - v(y)\right| \\
&\leqslant \left\|v - v^k\right\|_{C(\overline{\Omega})} + \left|v^k(x) - v^k(y)\right| + \left\|v^k - v\right\|_{C(\overline{\Omega})} \\
&\leqslant 2\left\|\overline{u} - v^k\right\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \left|v^k(x) - v^k(y)\right| \\
&\leqslant 2\left\|\overline{u} - v^k\right\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \left(\sum_{i=0}^n \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) |x-y|.
\end{aligned}$$

Or, par la proposition 5.15, page 50, on a que $\left\|\overline{u} - v^k\right\|_{C(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$. Ainsi, passant à la limite en k, on trouve,

*. Remarquons que si on montre (ii), alors, il en découlera que $v \in C^{0,1}(\Omega)$, ce qui est aussi à montrer.

$$|v(x)-v(y)| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{n} \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)|x-y|,$$

ce qui montre que

$$[v]_{1,\Omega} \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{15}$$

Et donc, on obtient,

$$\begin{aligned}
\|v\|_{C^{0,1}(\Omega)} &= \|v\|_{C(\overline{\Omega})} + [v]_{1,\Omega} \\
&\overset{(15)}{\leqslant} \|v\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{i=0}^{n} \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant \|\overline{u}\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=0}^{n} \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\overline{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=0}^{n} \|\overline{u}_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\overline{u}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant C_{ext} \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

□

4.2 Inclusion en dimension 1

Lemme 4.3.
Soient $I =]a,b[$ un intervalle borné ou non et $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ telle que pour tout $\varphi \in C_0^1(I)$, on a

$$\int_a^b f\varphi' = 0.$$

Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $f = C$ presque partout.

Démonstration. Soient $\psi \in C_0(I)$ tq $\int_a^b \psi = 1$ et $w \in C_0(I)$. Définissons $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(x) = w(x) - \psi(x) \int_a^b w(y)\,dy.$$

Clairement h est continue et à support compact. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b h(x)\,dx &= \int_a^b w(x)\,dx - \int_a^b \psi(x) \int_a^b w(y)\,dydx \\
&= \int_a^b w(x)\,dx - \underbrace{\int_a^b \psi(x)\,dx}_{1} \int_a^b w(y)\,dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $H : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \int_a^x h(y)\,dy$$

est une primitive de h à support compact. En effet, comme h a un suppport compact, il existe α et β tels que $a < \alpha < \beta < b$ et supp$h \subset [\alpha, \beta]$. Alors, pour tout $x < \alpha$, on a que $H(x) = 0$, car pour tout $a < y < x$, $h(y) = 0$. Et, pour tout $x > \beta$, on a que $H(x) = 0$. En effet, comme pour tout $\beta < y < b$, $h(y) = 0$, on a

$$\int_a^x h(y)\, dy = \int_a^x h(y)\, dy + \int_x^b h(y) = \int_a^b h(y)\, dy = 0.$$

Ceci montre que supp$H \subset [\alpha, \beta]$ et donc que H a un support compact.

On peut donc utiliser l'hypothèse sur f :

$$\begin{aligned}
0 = \int_a^b fH' &= \int_a^b f(x)\, h(x)\, dx \\
&= \int_a^b f(x) \left(w(x) - \psi(x) \int_a^b w(y) \right) dx \\
&= \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx - \int_a^b \int_a^b f(x)\, \psi(x)\, w(y)\, dydx \\
&= \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx - \int_a^b \int_a^b f(y)\, \psi(y)\, w(x)\, dydx \\
&= \int_a^b \left(f(x) - \int_a^b f(y)\, \psi(y)\, dy \right) w(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Comme w est quelconque, cette égalité est vraie pour tout $w \in C_0(I)$. D'où, par le lemme 3.3, page 8, on a que

$$f(x) - \int_a^b f(y)\, \psi(y)\, dy = 0$$

pour presque tout $x \in I$. Prenant $C = \int_a^b f(y)\, \psi(y)\, dy$, on obtient le résultat voulu. □

Lemme 4.4.
Soient $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non, $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ et $x_0 \in I$. On définit $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$v(x) = \int_{x_0}^x g(y)\, dy.$$

Alors,

$$v \in C(I)$$

et pour tout $\varphi \in C_0^1(I)$,

$$\int_a^b v\varphi' = -\int_a^b g\varphi.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que la fonction v est bien définie. En effet, pour tout $x \in I$, l'intervalle $]\min(x_0, x), \max(x_0, x)[$ est un ouvert dont l'adhérence est compacte dans I. Ainsi, $g \in L^1(]\min(x_0, x), \max(x_0, x)[)$.

Maintenant, montrons la contunuité. Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in I$ fixés. Comme I est ouvert, il existe $\gamma > 0$ tel que $]x - \gamma, x + \gamma[\subset I$. Alors, $g \in L^1(]x - \gamma, x + \gamma[)$. Ainsi, par le théorème 5.7, page 48, il existe $\tilde{\delta} > 0$ tel que pour tout ensemble $E \subset]x - \gamma, x + \gamma[$ avec $|E| \leqslant \tilde{\delta}$, on a

$$\left| \int_E g(\xi)\, d\xi \right| \leqslant \varepsilon.$$

Posons maintenant $\delta = \min\left(\gamma, \frac{\tilde{\delta}}{2}\right)$. Alors, pour tout $y \in]x-\delta, x+\delta[$, on a que $|]\min(x,y), \max(x,y)[| = |x-y| \leqslant 2\delta \leqslant \tilde{\delta}$ et que $]\min(x,y), \max(x,y)[\subset]x-\gamma, x+\gamma[$, d'où

$$|v(x) - v(y)| = \left|\int_x^y g(\xi)\, d\xi\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre la continuité.

Montrons maintenant que pour tout $\varphi \in C_0^1(I)$,

$$\int_a^b v\varphi' = -\int_a^b g\varphi.$$

Soit donc $\varphi \in C_0^1(I)$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b v\varphi' &= \int_a^b \int_{x_0}^x g(y)\,\varphi'(x)\, dydx \\ &= -\int_a^{x_0}\int_x^{x_0} g(y)\,\varphi'(x)\, dydx + \int_{x_0}^b \int_{x_0}^x g(y)\,\varphi'(x)\, dydx.\end{aligned}$$

Remarquons ici, qu'on a

$$\begin{aligned}A_1 := \{(x,y) \mid a < x < x_0 \text{ et } x < y < x_0\} &= \{(x,y) \mid a < y < x_0 \text{ et } a < x < y\} \\ A_2 := \{(x,y) \mid x_0 < x < b \text{ et } x_0 < y < x\} &= \{(x,y) \mid x_0 < y < b \text{ et } y < x < b\}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a par le théorème de Fubini (théorème 5.2, page 47),

$$\begin{aligned}\int_a^{x_0}\int_x^{x_0} g(y)\,\varphi'(x)\, dydx &= \int_{A_1} g(y)\,\varphi'(x)\, d(x,y) = \int_a^{x_0}\int_a^y g(y)\,\varphi'(x)\, dxdy \\ \int_{x_0}^b\int_{x_0}^x g(y)\,\varphi'(x)\, dydx &= \int_{A_2} g(y)\,\varphi'(x)\, d(x,y) = \int_{x_0}^b\int_y^b g(y)\,\varphi'(x)\, dxdy.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^b v\varphi' &= -\int_a^{x_0}\int_a^y g(y)\,\varphi'(x)\, dxdy + \int_{x_0}^b\int_y^b g(y)\,\varphi'(x)\, dxdy \\ &= -\int_a^{x_0} g(y)\,[\varphi(x)]_{x=a}^{x=y}\, dy + \int_{x_0}^b g(y)\,[\varphi(x)]_{x=y}^{x=b}\, dy \\ &= -\int_a^{x_0} g(y)\,\varphi(y) - \int_{x_0}^b g(y)\,\varphi(y)\, dy \\ &= -\int_a^b g\varphi,\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat voulu. □

Théorème 4.5.
Soit $I =]a,b[$ un intervalle borné ou non et $u \in W^{1,p}(I)$. Alors, il existe $\tilde{u} \in C\left(\overline{I}\right)$ telle que

$$u = \tilde{u}$$

presque partout et

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt$$

pour tout $x, y \in \overline{I}$.

Démonstration. On a que $u' \in L^1_{\text{loc}}(I)$. En effet, pour tout ensemble ouvert $\omega \subset I$ dont l'adhérence est compacte et inclue dans I, on a par l'inégalité de Hölder (théorème 5.4, page 47),

$$\int_\omega |u'| \leqslant \|u'\|_{L^p(\omega)} \|1\|_{L^{p'}(\omega)} < \infty.$$

Soit maintenant $x_0 \in I$. Posons $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$v(x) = \int_{x_0}^x u'(t)\, dt.$$

Par le lemme 4.4, page 42 $v \in C(I)$ et pour tout $\varphi \in C_0^1(I)$,

$$\int_I v\varphi' = -\int_I u'\varphi = \int_I u\varphi'$$

et donc,

$$\int_I (v - u)\varphi' = 0.$$

Ainsi, par le lemme 4.3, page 41, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $v - u = C$.

Posons maintenant $\tilde{u} = v - C$. Alors, $\tilde{u} = u$ presque partout, $\tilde{u} \in C(I)$ et pour tout $x, y \in \overline{I}$,

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = v(x) - C - v(y) + C = \int_y^x u'(t)\, dt,$$

ce qui finit la preuve.

□

Remarque 4.6.
Remarquons que dans le cas en dimension 1, on a, en particulier que les fonctions de $W^{1,1}(I)$ admettent un représentant continu. Ainsi, on obtient une inclusion de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(I)$ dans l'espace de Hölder $C^{0,0}\left(\overline{I}\right) = C\left(\overline{I}\right)$. On peut voir ce résultat comme l'équivalent du théorème d'inclusion des espaces de Sobolev dans les espaces de Hölder dans le cas $n < p \leqslant \infty$ mais avec $1 = n = p$. La question se pose alors peut-on généraliser ce résultat en dimension quelconque. C'est-à-dire, a-t-on que les fonctions de $W^{1,n}(\Omega)$ admettent un représentant continu ?

La réponse est malheureusement non, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.7.
Soient $n = 2$, $0 < s < \frac{1}{2}$ et $f : B\left(0, \frac{1}{4}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = |\log|x||^s.$$

Le but de cet exemple est de montrer que $f \in W^{1,2}\left(B\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)$. Car alors, on aura une fonction f qui est dans $W^{1,n}\left(B\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)$ mais dont la classe d'équivalence ne contient aucune fonction continue.

Commençons par montrer que $f \in L^2\left(B\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)$. On a

$$\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} |f|^2 = \int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} |\log|x||^{2s}\, dx.$$

Passant en coordonnées polaires $x = r(\cos\theta, \sin\theta)$, on a le jacobien r et donc,

$$\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} |f|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{4}} |\log(r)|^{2s}\, r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{1}{4}} |\log(r)|^{2s}\, r dr.$$

Or, on a que $\lim_{r\to 0} |\log(r)|\, r^{\frac{1}{2s}} = 0$. En effet, comme $0 < s < \frac{1}{2}$, on a que $\frac{1}{2s} > 1$. D'où,

$$0 \leqslant \lim_{r\to 0} |\log(r)|\, r^{\frac{1}{2s}} \leqslant \lim_{r\to 0} |\log(r)|\, r = 0.$$

Ainsi, on peut prolonger la fonction $\log(r)\, r^{\frac{1}{2s}}$ par continuité sur tout l'ntervalle $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, et donc, elle devient une fonction continue sur un compact qui est donc bornée. Ainsi, il existe C_1 telle que $\log(r)\, r^{\frac{1}{2s}} \leqslant C_1$ pour tout $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{4}$. D'où,

$$\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} |f|^2 \leqslant 2\pi \int_0^{\frac{1}{4}} C_1^{2s} dr < \infty.$$

Remarquons ici que f est en vérité continûment dérivable sur $B\left(0,\frac{1}{4}\right)\setminus\{0\}$, et on a

$$\begin{aligned}
f_{x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[|\log|x||^s\right] \\
&= s\,|\log|x||^{s-1}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[|\log|x||\right] \\
&= s\,|\log|x||^{s-1}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-\log|x|\right] \\
&= -s\,|\log|x||^{s-1}\,\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[|x|\right]}{|x|} \\
&= -s\,|\log|x||^{s-1}\,\frac{x_i}{|x|^2}.
\end{aligned}$$

Mais, on a également que $f_{x_i} \in L^2\left(B\left(0,\frac{1}{4}\right)\right)$. En effet, on a,

$$\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} |f_{x_i}|^2 = \int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} s^2\,|\log|x||^{2(s-1)}\,\frac{x_i^2}{|x|^4}dx \leqslant \int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} s^2\,|\log|x||^{2(s-1)}\,\frac{1}{|x|^2}dx.$$

Passant en coordonnées polaires $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} |f_{x_i}|^2 &\leqslant s^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{4}} |\log(r)|^{2(s-1)}\,\frac{1}{r^2} r dr d\theta \\
&= 2\pi s^2 \int_0^{\frac{1}{4}} |\log(r)|^{2(s-1)}\,\frac{1}{r}dr.
\end{aligned}$$

Calculons $\int_0^{\frac{1}{4}} |\log(r)|^{2(s-1)} \frac{1}{r} dr$ séparément. On a que la fonction $-\frac{1}{2(s-1)+1} |\log(r)|^{2(s-1)+1}$ est une primitive de $|\log(r)|^{2(s-1)} \frac{1}{r}$ sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$. En effet,

$$\frac{d}{dr}\left[-\frac{1}{2(s-1)+1} |\log(r)|^{2(s-1)+1}\right] = |\log(r)|^{2(s-1)} \frac{\log(r)}{|\log(r)|} \frac{1}{r} = |\log(r)|^{2(s-1)} \frac{1}{r},$$

utilisant le fait que sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, $\log(r) < 0$.

On obtient donc

$$\int_0^{\frac{1}{4}} |\log(r)|^{2(s-1)} \frac{1}{r} dr = \left[-\frac{1}{2(s-1)+1} |\log(r)|^{2(s-1)+1}\right]_{r=0}^{r=\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2(s-1)+1} \left|\log\left(\frac{1}{4}\right)\right|^{2(s-1)+1},$$

puisque $0 < s < \frac{1}{2}$ implique $2(s-1)+1 < 0$.

Ainsi,

$$\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} |f_{x_i}|^2 \leqslant -\frac{1}{2(s-1)+1} \left|\log\left(\frac{1}{4}\right)\right|^{2(s-1)+1} 2\pi s^2,$$

ce qui montre que $f_{x_i} \in L^2\left(B\left(0, \frac{1}{4}\right)\right)$.

Il ne nous reste plus qu'à voir que f_{x_i} est la dérivée partielle de f au sens faible par rapport à x_i. Soit donc $\varphi \in C_0^1\left(B\left(0, \frac{1}{4}\right)\right)$ et $\frac{1}{4} > \varepsilon > 0$. On a

$$\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} f\varphi_{x_i} = \int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)\backslash B(0,\varepsilon)} f\varphi_{x_i} + \int_{B(0,\varepsilon)} f\varphi_{x_i}.$$

Or, sur $B\left(0, \frac{1}{4}\right) \backslash B(0,\varepsilon)$, on a que f est continûment dérivable. On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties pour trouver,

$$\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} f\varphi_{x_i} = -\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)\backslash B(0,\varepsilon)} f_{x_i}\varphi + \int_{B(0,\varepsilon)} f\varphi_{x_i}.$$

Or, par l'inégalité de Hölder, on a $f\varphi_{x_i}, f_{x_i}\varphi \in L^1\left(B\left(0, \frac{1}{4}\right)\right)$. Ainsi, par théorème 5.7, page 48, on a que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)\backslash B(0,\varepsilon)} f_{x_i}\varphi\right] &= \int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} f_{x_i}\varphi \\ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{B(0,\varepsilon)} f\varphi_{x_i}\right] &= 0. \end{aligned}$$

Et donc on a

$$\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} f\varphi_{x_i} = -\int_{B\left(0,\frac{1}{4}\right)} f_{x_i}\varphi,$$

qui est le résultat voulu.

5 Annexes

Dans cette section, on donnera les résultats qu'on utilise dans les démonstrations des autres sections. En général, ces résultats sont des résultats de domaines des mathématiques sur lesquels reposent les espaces de Sobolev (Intégrale de Lebesgue, algèbre linéaire, etc...) et ils seront donnés sans preuve.

Théorème 5.1 (Théorème de la convergence dominée)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite de fonctions intégrables sur Ω et convergeant point par point vers une fonction f, telle qu'il existe g intégrable sur Ω vérifiant $|f_k(x)| \leqslant g(x)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx.$$

Théorème 5.2 (Théorème de Fubini)**.**
Soient $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts et $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$, on a

$$F(x,\cdot) \in L^1(\Omega_2)$$

et

$$\int_{\Omega_2} F(\cdot, y)\, dy \in L^1(\Omega_1).$$

De même en échangeant les rôles de x, y et Ω_1, Ω_2.

De plus

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)\, dydx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} F(x,y)\, dxdy = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\, dxdy$$

Théorème 5.3.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in L^1(\Omega)$. ALors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$\|f - g\|_{L^1} \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 5.4 (Inégalité de Hölder)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p' = p/(p-1)$ l'exposant conjugué de p, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$. Alors

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Théorème 5.5 (Inégalité de Jensen)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $f\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. ALors,

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\, dx\right) \leqslant \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u(x))\, dx.$$

Théorème 5.6.
Soient $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $(\rho_k)_{k=0}^{\infty}$, une suite régularisante. Alors,

$$\rho_k * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\rho_k * f \longrightarrow f,$$

dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 5.7.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in L^1(\Omega)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout sous ensemble $E \subset \Omega$ tel que $|E| \leqslant \delta$, on a

$$\left|\int_E f\right| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 5.8.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $1 \leqslant p < \infty$. Alors

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Théorème 5.9 (Théorème de Tietze-Urysohn)**.**
[5, p. 85] Soit (M,d) un espace métrique, $F \subset M$, un sous ensemble fermé et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors, on peut étendre f en une application $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée telle que $\sup_{x\in M} g(x) = \sup_{x\in F} f(x)$ et $\inf_{x\in M} g(x) = \inf_{x\in F} f(x)$

Corollaire 5.10.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $K \subset \Omega$ un sous ensemble compact et $\psi_0 : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors, on peut étendre ψ_0 en une application $\psi \in C_0(\Omega)$ telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \psi(x) = \max(0, \sup_{x\in K} \psi_0(x))$ et $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \psi(x) = \min(0, \inf_{x\in K} \psi_0(x))$

Démonstration. Comme $K \subset \Omega$, on a que pour tout $x \in K$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_x) \subset \Omega$. Ainsi,

$$K \subset \bigcup_{x\in K} B\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right) \subset \Omega.$$

D'où, la famille $\left\{B\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right)\right\}_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert de K. Mais, K étant compact, il existe un sous-recouvrement fini. C'est-à-dire, il existe $x_1, ..., x_m \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}\right) \subset \Omega.$$

Posons $\varepsilon_i = \varepsilon_{x_i}$ pour alléger les notations et

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{\varepsilon_i}{2}\right).$$

U est ouvert en tant qu'union d'ouverts et on a $K \subset U \subset \Omega$, ainsi que

$$K \subset \overline{U} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{B}\left(x_i, \frac{\varepsilon_i}{2}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon_i) \subset \Omega.$$

Définissons maintenant $\varphi : [R^n \backslash U] \cup K \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi_0(x) & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \in R^n \backslash U \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie, continue et bornée. Ainsi, par le théorème de Tietze-Urysohn (théorème 5.9, page 48), elle se prolonge continuement en une fonction continue ψ sur tout $\mathbb{R}^n$. De plus, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) \neq 0\} \subset U$ ainsi,

$$\text{supp}\psi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) \neq 0\}} \subset \overline{U} \subset \Omega.$$

Et donc, ψ a un support compact dans Ω.

Pour finir la démonstration, il faut encore voir que $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\psi(x)=\max\left(0,\sup_{x\in K}\psi_0(x)\right)$ et $\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\psi(x)=\min\left(0,\inf_{x\in K}\psi_0(x)\right)$. On a :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\psi(x)=\sup_{x\in[R^n\setminus U]\cup K}\varphi(x)=\max\left(\sup_{x\in R^n\setminus U}\varphi(x),\sup_{x\in K}\varphi(x)\right)=\max\left(0,\sup_{x\in K}\psi_0(x)\right).$$

Pour l'infimum, on procède exactement de la même manière.

□

Théorème 5.11 (Théorème de représentation de Riesz)**.**
Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $1<p<\infty$ et $F:L^p(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $g\in L^{p'}(\Omega)$ tel que

$$F(u)=\int_\Omega ug.$$

Théorème 5.12 (Théorème de représentation de Riesz dans le cas $p=1$)**.**
Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert et $F:L^1(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ linéaire et continue. Alors, il existe $g\in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$F(u)=\int_\Omega ug$$

Proposition 5.13.
Soit (M_1,d_1) un espace métrique, (M_2,d_2) un espace métrique complet, $D\subset M_1$ un sous ensemble dense et $f:D\longrightarrow M_2$ une application uniformément continue. Alors, il existe une application $\overline{f}:M_1\longrightarrow M_2$ continue telle que $\overline{f}\Big|_D=f$.

Démonstration. Soit $a\in M_1$ quelconque. Alors, il existe une suite $(a_n)_{n=0}^\infty$ telle que $a_n\longrightarrow a$ dans M_1. Alors, $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ est une suite de Cauchy dans M_2. En effet, soit $\varepsilon>0$. Alors, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $x,y\in M_1$ tels que $d_1(x,y)\leqslant\delta$ on a $d_2(f(x),f(y))\leqslant\varepsilon$. Et comme $(a_n)_{n=0}^\infty$ est une suite convergente, elle est de Cauchy. Il existe donc $N_1\in\mathbb{N}$ tel que $d_1(a_n,a_m)\leqslant\delta$ pour tout $n,m\geqslant N_1$. D'où, pour tout $n,m\geqslant N_1$, on a $d_2(f(a_n),f(a_m))\leqslant\varepsilon$. Ainsi, M_2 étant complet, $(f(a_n))_{n=0}^\infty$ converge. On pose

$$\overline{f}(a)=\lim_{n\to\infty}f(a_n).$$

Il nous faut voir que $\overline{f}$ est bien définie, c'est-à-dire que la valeur de $\overline{f}(a)$ ne dépend pas de la suite $(a_n)_{n=0}^\infty$ qu'on considère. Soit donc $(b_n)_{n=0}^\infty$ une autre suite telle que $b_n\longrightarrow a$ dans M_1. On a qu'il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que $d_1(a_n,a)\leqslant\frac{\delta}{2}$ et $d_1(b_m,a)\leqslant\frac{\delta}{2}$ pour tout $n,m\geqslant N_2$. Et, donc, $d_1(a_n,b_m)\leqslant d_1(a_n,a)+d_1(b_m,a)\leqslant\delta$, pour tout $n,m\geqslant N_2$. Ainsi, $d_2(f(a_n),f(b_m))\leqslant\varepsilon$ pour tout $n,m\geqslant N_2$. Ce qui montre que

$$d_2\left(\lim_{n\to\infty}f(a_n),\lim_{m\to\infty}f(b_m)\right)=0$$

et donc que $\overline{f}$ est bien définie. Le fait que $\overline{f}$ est continue découle de la manière dont on la défini et le fait que $\overline{f}\Big|_D=f$ découle de la continuité de f. En effet, si $a\in D$ alors, $\overline{f}(a)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=f(a)$. □

Proposition 5.14.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert tel qu'il existe $r > 0$ avec $\overline{B}(0,r) \subset \Omega$ et $f \in C(\Omega)$. Alors,

$$\int_{\partial B(0,r)} f(x)\, dS_x = r^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} f(rx)\, dS_x.$$

Démonstration. Soient $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et $\varphi : A \longrightarrow \partial B(0,1)$ une paramétrisation de $\partial B(0,1)$. Alors, $r\varphi$ est une paramétrisation de $\partial B(0,r)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,r)} f(x)\, dS_x &= \int_A f(r\varphi(\theta)) \sqrt{\det \left\langle \frac{\partial (r\varphi)}{\partial \theta_i}, \frac{\partial (r\varphi)}{\partial \theta_j} \right\rangle} d\theta \\
&= \int_A f(r\varphi(\theta)) \sqrt{\det r^2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \right\rangle} d\theta \\
&= \int_A f(r\varphi(\theta)) \sqrt{r^{2(n-1)} \det \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \right\rangle} d\theta \\
&= r^{n-1} \int_A f(r\varphi(\theta)) \sqrt{\det \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \right\rangle} d\theta \\
&= r^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} f(rx)\, dS_x,
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat voulu.

□

Proposition 5.15.
Soit $f \in C(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f\|_{C(\mathbb{R}^n)} < \infty$ et $(\rho_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite régularisante. Alors,

$$\rho_k * f \longrightarrow f,$$

dans $C(\mathbb{R}^n)$.

Références

[1] H. W. Alt, *Lineare Funktionanalysis*, 2ème édition, Sringler-Lehrbuch, 1992.

[2] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Dunod, 2005.

[3] B. Dacorogna, *Introduction to the Calculus of Variations*, 2ème édition, Imperial College Press, 2009.

[4] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002

[5] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academid Press, 1960.