EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 9	13 novembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

telles que f soit holomorphe dans Ω et $f' = 0$ dans Ω. Alors f est constante.

Indication : Utiliser la proposition 9.3 du cours.

Exercice 2 (Fonctions logarithmes, À rendre)**.**
Soit Ω un ouvert simplement connexe, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe dans Ω telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Soit γ_z une courbe simple et régulière par morceaux telle que $\gamma_z \subset \Omega$ joignant z_0 à un point quelconque $z \in \Omega$. On définit alors

$$F(z) = \log [f(z_0)] + \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw$$

où la fonction log est la détermination principale du logarithme définie au cours, i.e.

$$\log z = \log |z| + i (\arg z) \quad \text{avec } -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Que donne la construction ci-dessus dans le cas où $f(z) = z$, $z_0 = 1$ et

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

Indication. Trouver une courbe γ_z entre 1 et z passant par $|z|$ et ne sortant jamais de Ω.

Exercice 3.
Soient $n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C}, r > 0$ et $\gamma_{a,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$. Discuter en fonction de n, de a et de r la valeur de l'intégrale

$$I(n, a, r) := \int_{\gamma_{a,r}} z^n dz.$$

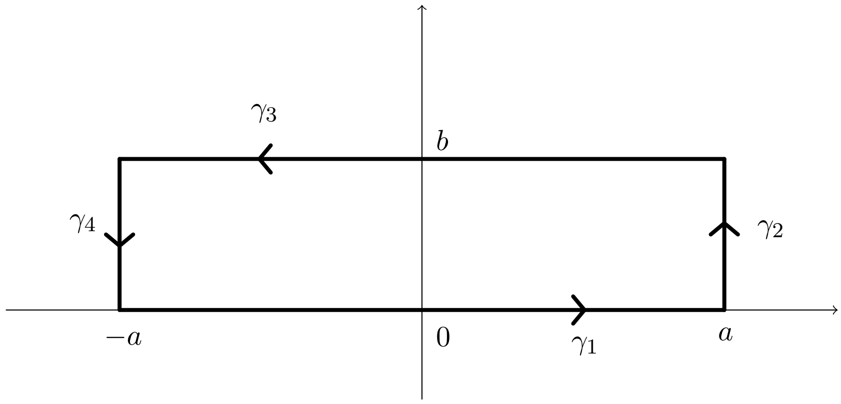
Exercice 4.
Soient $|a| < r < |b|$ et $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

Exercice 5.
(Ex 9 page 76). Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)\ dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin(2bx)\ dx = 0.$$

Indication : utiliser le Théorème de Cauchy pour $f(z) = e^{-z^2}$ et le chemin $\gamma_a = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$:



On rappelle également que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 6.
(Ex 9 page 71). Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0.$$

Montrer qu'il existe une constante réelle c et une constante complexe w telle que

$$f(z) = -icz + w.$$

Exercice 7.

(Ex 10 page 71). Si $g(u,v)$ est harmonique dans $\mathbb{R}^2$ (i.e. $\Delta g = 0$) et $f = u+iv$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, vérifier alors que la fonction

$$h(x,y) := g(u(x,y), v(x,y))$$

est harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8.

(Ex 11 page 71). Soient $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $u \in C^2(A)$ une fonction harmonique dans A. Soient également

$$\Omega := \{z = x + iy : (x,y) \in A\} \subset \mathbb{C}$$

et

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \quad \forall\, z \in \Omega.$$

Montrer que f est holomorphe dans Ω.