EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 8	6 novembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$\log e^z = z, \text{ si } \operatorname{Im} z \in \left]-\pi, \pi\right] \quad \text{et} \quad e^{\log z} = z, \text{ si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$
2. Soient $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que
$$\log(zw) = \begin{cases} \log z + \log w & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]-\pi, \pi\right] \\ \log z + \log w - 2\pi i & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]\pi, 2\pi\right] \\ \log z + \log w + 2\pi i & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]-2\pi, -\pi\right]. \end{cases}$$
3. Trouver et expliquer la faute dans la série d'égalités suivante :
$$1 = 1^{1/2} = \left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^{\pi i} = -1.$$

Exercice 2.
Soit $z \neq 0$. Montrer que la définition donnée au cours de la fonction z^2 correspond à celle obtenue de manière algébrique, c'est à dire
$$z^2 = z \cdot z.$$

Exercice 3.
Soient $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Montrer que
$$z^{\beta+\gamma} = z^\beta z^\gamma.$$
2. Montrer que
$$z^\gamma w^\gamma = \begin{cases} (zw)^\gamma & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]-\pi, \pi\right] \\ (zw)^\gamma e^{2\pi\gamma i} & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]\pi, 2\pi\right] \\ (zw)^\gamma e^{-2\pi\gamma i} & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]-2\pi, -\pi\right]. \end{cases}$$

3. Montrez que la fonction $f(z) = z^\gamma$ est holomorphe dans
$$O := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}$$
et que sa dérivée est donnée par
$$f'(z) = \gamma z^{\gamma - 1}.$$

Exercice 4.
(Ex 3 page 75) Calculer

1. $\int_\gamma (z^2 + 1)\, dz$, où $\gamma = [1, 1+i]$.
2. $\int_\gamma \operatorname{Re}(z^2)\, dz$, où $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Exercice 5.
Soient $z = x + iy$ et la fonction
$$f(z) := \sqrt{|xy|}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

1. Vérifier les équations des Cauchy-Riemann associées à f en $z_0 = 0$.
2. Montrer que f n'est pas holomorphe en $z_0 = 0$.
3. Montrer que la partie réelle de f n'est pas différentiable en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exercice 6.
(Ex 7 page 71). Montrer que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est constante.
(b) $\operatorname{Re}(f)$ est constante.
(c) $\operatorname{Im}(f)$ est constante.

En déduire que $f(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.

Exercice 7 (Logarithme de fonction, À rendre)**.**
Soit Ω un ouvert simplement connexe, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe dans Ω telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Soit encore pour tout $z \in \Omega$, γ_z une courbe simple et régulière par morceaux joignant z_0 à z. On définit alors
$$F(z) = \log\left[f(z_0)\right] + \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw$$

où la fonction log est la détermination principale du logarithme définie au cours, i.e.

$$\log z = \log |z| + i\,(\operatorname{Arg} z) \quad \text{avec } -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.$$

Montrer que la définition de F est indépendante du choix de γ_z, que F est holomorphe dans Ω et que, $\forall\, z \in \Omega$,

$$e^{F(z)} = f\,(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}\left[F\,(z)\right] = \log \left|f\,(z)\right|.$$