EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 7	30 Octobre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
(Ex 4 page 43) Vérifier le théorème de Stokes pour $F(x, y, z) = (-2y, xz, y)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2},\ x \geq 0 \text{ et } \frac{4}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Exercice 2.
(Ex 6 page 44) Vérifier le théorème Stokes pour $F(x, y, z) = (0, 0, y + z^2)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x, y, z \geq 0,\ 0 \leq \arccos \frac{z}{2} \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Exercice 3 (À rendre)**.**
Soit la série exponentielle

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série est $R = \infty$.
2. Montrer que e^z est holomorphe et $(e^z)' = e^z$.
3. En admettant que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (la preuve est identique au cas réel), montrer que
$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} \left(\cos(\mathrm{Im}(z)) + i \sin(\mathrm{Im}(z)) \right), \quad \forall\ z \in \mathbb{C}.$$
4. Montrer que
$$|e^{iy}| = 1,\ \forall\ y \in \mathbb{R}, \qquad e^z = e^{z+i2k\pi},\ \forall\ z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$$
5. (Ex 1 page 70) Montrer que les fonctions
$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ et calculer leurs dérivées.

Exercice 4.
(Ex 4 page 71) Trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la partie réelle est
$$u(x,y) = e^{(x^2-y^2)} \cos(2xy).$$

Exercice 5.
(Ex 6 page 71) Posons $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, avec $u, v \in C^2(\Omega)$ (ici Ω peut être vu dans $\mathbb{R}^2$). Montrer les propriétés suivantes.

1. u et v sont harmoniques dans Ω (c'est-à-dire $\Delta u = \Delta v = 0$).
2. $u_x v_x + u_y v_y = 0$.
3. $|f'(z)|^2 = u_x v_y - u_y v_x$.

Exercice 6.
(Ex 8 page 71) Montrer que les équations de Cauchy-Riemann, en coordonnées polaires, s'écrivent
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Exercice 7.
Soient $O \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{C}$. Montrer les propriétés suivantes.

1. Si f est holomorphe en $z_0 \in O$, alors f est continue en z_0.
2. Si $f, g : O \to \mathbb{C}$ sont holomorphes en $z_0 \in O$, alors leur somme, produit et quotient sont holomorphes en $z_0 \in O$. Plus précisémment
$$(f+g)'(z_0) = (f'+g')(z_0) \quad \text{et} \quad (fg)'(z_0) = (f'g + fg')(z_0)$$
et si, de plus, $g(z_0) \neq 0$, alors
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)(z_0).$$
3. Si $f : O \to \Omega \subset \mathbb{C}$ est holomorphe dans O et si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe dans Ω, alors
$$g \circ f : O \to \mathbb{C}$$
est holomorphe dans O et pour tout $z_0 \in O$ on a
$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

Indication. Pour ce point, utiliser la définition suivante : f est holomorphe en z_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et un nombre $w \in \mathbb{C}$ tels que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$ et

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = h(w + \epsilon(h)), \quad \text{pour tout } h \text{ suffisamment petit.}$$

On note $f'(z_0) := w$.