EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 6	23 Octobre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
(Ex 6 page 37) Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x,y,z) = (x,y,z)$ et

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4 \text{ et } x^2+y^2 < 3z\right\}.$$

Exercice 2 (À rendre)**.**
(Ex 9 page 37) Vérifier le théorème de la divergence pour $F(x,y,z) = (2,0,xy^2+z^2)$ et

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ 0 < z < 2 \text{ et } 4(x^2+y^2) < (z-4)^2\right\}.$$

Exercice 3.
(**Les identités de Green dans** $\mathbb{R}^3$) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, ν la normale extérieure unité à $\partial\Omega$. Pour tout $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, vérifier les trois identités suivantes.

$$\iiint_\Omega [v\Delta u + \langle \nabla u; \nabla v\rangle]\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

$$\iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma,$$

$$\iiint_\Omega \Delta u\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Exercice 4 (L'équation de Laplace, problème de Neumann)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ouvert, régulier, connexe et borné, $f \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$.

1. Soit le problème différentiel homogène

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

   où $w \in C^2(\overline{\Omega})$ est l'inconnue. Déterminer l'ensemble des solutions de (1).
2. Que peut-on dire sur l'unicité des solutions du problème

$$\begin{cases} \Delta u\,(x) = f\,(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \varphi\,(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

3. Si (2) admet une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$, quelle condition nécessaire doivent f et φ satisfaire ?

Exercice 5.
Soit $k > 0$ entier et $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, montrer que

$$(a_1 + \cdots + a_k)^2 \leq k\left(a_1^2 + \cdots + a_k^2\right).$$

Exercice 6.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$.

1. Montrer que

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   Indication : Vous pouvez soit utiliser l'inégalité de l'exercice 5 avec $k = 2$, soit étudier la fonction

$$I(\lambda) := \int_\Omega \left(|f(x)| + \lambda|g(x)|\right)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné régulier. A l'aide de la question précédente, montrer que si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq K\left(\int_\Omega u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla^2 u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

   où $\nabla^2 u$ est la matrice hessienne de u et

$$|\nabla^2 u(x)|^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2.$$