EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 5	16 Octobre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
(Ex 3 page 31) Soient $\rho(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2}$ et

$$\Sigma := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2-z^2=0, \; 0 \le z \le 1\right\}.$$

Calculer $\iint\limits_{\Sigma} \rho \, ds$.

Exercice 2.
(Ex 5 page 31) Soit

$$\Omega := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 1\right\}.$$

Calculer l'aire de $\partial\Omega$.

Exercice 3.
(Ex 4 page 31) Soient $F(x,y,z) = (0,z,z)$ et

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 6-3x-2y; \; x,y,z \ge 0\right\}.$$

Calculer le flux qui passe par cette surface et qui s'éloigne de l'origine.

Exercice 4.
(Ex 6 page 31) Soient $0 < a < R$ et le disque

$$D := \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-R)^2+z^2 \le a^2\}.$$

Soit le tore Ω obtenu par rotation de D autour de l'axe Oz.

1. Montrer que

$$F(r,\varphi,\theta) := ((R+r\cos\varphi)\cos\theta, \; (R+r\cos\varphi)\sin\theta, \; r\sin\varphi)$$

avec $0 \le r < a$ et $0 \le \theta, \varphi < 2\pi$ est une paramétrisation de Ω. Faire un dessin et indiquer ce que représentent r, θ et φ.

2. Calculer le jacobien de la paramétrisation puis calculer le volume de Ω.
3. Trouver une paramétrisation de $\partial\Omega$, exprimer une normale à $\partial\Omega$ et calculer l'aire de $\partial\Omega$.
4. Calculer $\iiint_\Omega z^2 dx\, dy\, dz$.

Exercice 5.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine étoilé par rapport à l'origine et $F \in C^1\left(\Omega; \mathbb{R}^3\right)$ tel que

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Soit l'application

$$\Phi(x) := \int_0^1 [F(tx) \wedge x] t\, dt = \left(\int_0^1 [F(tx) \wedge x]^i t\, dt \right)_{i=1,2,3}, \quad x \in \Omega.$$

Montrer que

$$F = \operatorname{rot} \Phi \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Exercice 6.
Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ deux ouverts bornés et $\tau = \tau(y_1, y_2) \in C^1\left(\overline{B}; \mathbb{R}^3\right)$. Soit une application $\varphi : \overline{A} \to \overline{B}$, telle que

$$\varphi \in C^1\left(\overline{A}; \mathbb{R}^2\right),\ \varphi^{-1} \in C^1\left(\overline{B}; \mathbb{R}^2\right) \quad \text{et} \quad \det \nabla\varphi(x_1, x_2) > 0,\ \forall (x_1, x_2) \in \overline{A}.$$

1. Posons $\sigma = \sigma(x_1, x_2) := \tau \circ \varphi(x_1, x_2) \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$. Exprimer les dérivées partielles de σ en fonction de celles de τ et φ, et montrer que

$$\sigma_{x_1}(x_1, x_2) \wedge \sigma_{x_2}(x_1, x_2) = \det \nabla\varphi(x_1, x_2)\ [\tau_{y_1}(\varphi(x_1, x_2)) \wedge \tau_{y_2}(\varphi(x_1, x_2))].$$

2. En déduire que pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}^3)$ et $F \in C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$,

$$\iint\limits_\sigma f ds = \iint\limits_\tau f ds \quad \text{et} \quad \iint\limits_\sigma F \cdot ds = \iint\limits_\tau F \cdot ds.$$

Exercice 7 (À rendre)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple, régulière et $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $f > 0$. Considérons encore la surface

$$\Sigma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Gamma, 0 \le z \le f(x, y) \right\}.$$

Montrer que

$$\int_\Gamma f\, dl = \text{Aire}\,(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\, ds.$$