EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 4	9 octobre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
(Ex 2 page 24) Vérifier le Théorème de Green pour

$$F(x,y) = \left(x+y, y^2\right) \quad \text{et} \quad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Definition 1.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier et $u \in C^1(\Omega)$. Soit $\nu = \nu(x)$ le vecteur normal unité extérieur en $x \in \partial\Omega$. On définit la *dérivée normale* de u au point $x \in \partial\Omega$ par

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) := \langle \nabla u(x); \nu(x) \rangle .$$

Exercice 2.
(Ex 3 page 24) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Soit $u(x,y) = y + e^x$.

1. Calculer $\displaystyle\iint_\Omega \Delta u(x,y)\, dx\, dy$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl$, où ν est la normale extérieure unité à $\partial\Omega$ et le sens de parcours de $\partial\Omega$ est tel qu'il laisse Ω à gauche.

Exercice 3 (À rendre)**.**
(**Les identités de Green dans** $\mathbb{R}^2$) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la normale extérieure unité à $\partial\Omega$. Pour tout $u, v \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, vérifier les trois identités suivantes.

$$\iint_\Omega \left[v\Delta u + \langle \nabla u; \nabla v \rangle\right] dx\, dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl,$$

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] dl,$$

$$\iint_\Omega \Delta u\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl.$$

Exercice 4.
(**L'équation de Laplace, problème de Dirichlet**) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, borné et régulier, $f \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$.

1. Soit le problème différentiel homogène

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ w(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

   où $w \in C^2(\overline{\Omega})$ est l'inconnue. Montrer que $w \equiv 0$ est l'**unique** solution de (1).

   Indication : utiliser la première identité de Green.

2. En déduire que le problème

$$\begin{cases} \Delta u\,(x) = f\,(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u\,(x) = \varphi\,(x) & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

   admet **au plus** une solution $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Exercice 5.
(Ex 9 page 25) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et tel que $\partial\Omega = \Gamma$ soit une courbe simple fermée régulière de paramétrisation $\gamma\,(t) = (\gamma_1\,(t)\,, \gamma_2\,(t))\,,\ t \in [a, b]$. A l'aide du théorème de Green, montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}\,(\Omega) &= \int_a^b \gamma_1\,(t)\,\gamma_2'\,(t)\ dt = -\int_a^b \gamma_1'\,(t)\,\gamma_2\,(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \left[\gamma_1\,(t)\,\gamma_2'\,(t) - \gamma_1'\,(t)\,\gamma_2\,(t)\right]\ dt. \end{aligned}$$

Exercice 6.
Soient $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$ et

$$F\,(x, y) = \begin{cases} \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \in \overline{\Omega} \setminus \{(0,0)\} \\ (0,0) & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Calculer $\mathrm{rot}\, F\,(x, y)$ quand $(x, y) \neq (0, 0)\,.$
2. Calculer $\displaystyle\iint_\Omega \mathrm{rot}\, F\,(x, y)\, dxdy$ et $\displaystyle\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$. Le résultat contredit-il le théorème de Green ?

Exercice 7.
Soit $f = f(y_1, y_2, y_3) \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Calculer la divergence de

$$F(x_1, x_2, x_3) := \Big(f(x_1, x_1, x_1), f(x_1^3, x_2^3, x_3^3), f(x_2^2 x_3^2, x_1^2 x_3^2, x_1^2 x_2^2)\Big) .$$