EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 3	2 octobre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1\, dx_2$$

et en déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 2 (À rendre, Ex 6 page 18)**.**
(**Facteur intégrant**) Soit l'équation différentielle

$$f_2\,(t, u(t))\, u'(t) + f_1\,(t, u(t)) = 0,\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Supposons qu'il existe $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (avec $W(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $W \in C^1(\mathbb{R}^2)$) tel que l'application

   $$W(x,y)F(x,y) = (Wf_1, Wf_2)$$

   dérive d'un potentiel Φ sur $\mathbb{R}^2$. Soit une fonction $u \in C^1(\mathbb{R})$ donnée, sous forme implicite, par

   $$\Phi\,(t, u(t)) = \text{constante},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que u est une solution de l'équation (1)
2. Appliquer le point précédent pour trouver une solution du problème

   $$4t\sin(tu(t)) + u(t)(t^2+1)\cos(tu(t)) + u'(t)\left[(t^2+1)t\cos(tu(t))\right] = 0.$$

   Indication : choisir $W(x,y) = 1 + x^2$.

Exercice 3. 1. Soit $p \geq 1$ et la fonction

$$h_p(x) := |x|^p = \left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right)^p, \quad \forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Calculer $\nabla h_p(x)$.

2. Soit une application $G \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ qui ne s'annule jamais et la fonction
$$f_p(t) := \frac{1}{p}|G(tx)|^p, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$
Calculer $\frac{d}{dt}f_p(t)$.

Exercice 4.
Montrer qu'un ensemble convexe est connexe par arcs.

Exercice 5.
Soient les ensembles

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x^2,\ x \neq 0\},$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1\}.$$

Les dessiner et déterminer s'ils sont connexes ou non-connexes.

Rappels :

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Un ensemble U est dit *ouvert dans* Ω (ou *relativement à* Ω) s'il existe $W \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert (dans $\mathbb{R}^n$) tel que
$$U = W \cap \Omega.$$

2. Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est *non-connexe* s'il existe deux ensembles $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ tels que
$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$$
et Ω_1, Ω_2 sont ouverts relativement à Ω.

Exercice 6 (Ex 7 page 19)**.**
Soient les champs

$$F(x, y) = \left(\frac{-x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-y}{(x^2 + y^2)^2}\right) \quad \text{et} \quad G(x, y) = \left(\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-xy^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)$$

et soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dérivent-ils d'un potentiel sur Ω ? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.

Exercice 7.
Soient $n \geq 1$ un entier et

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^n} \, , \, \frac{y}{(x^2+y^2)^n} \right).$$

(i) Trouver le domaine de définition Ω de F. Dire s'il est connexe et s'il est simplement connexe.

(ii) Calculer le rotationnel de F.

(iii) F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.