EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 2	25 septembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1 (À rendre)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple et régulière telle qu'il existe $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$ et $\delta\colon [c,d] \to \Gamma$ bijectives et avec $\gamma(a) = \delta(c)$, $\gamma(b) = \delta(d)$, $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$ et $\delta'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [c,d]$.

Supposons de plus qu'il existe $\theta\colon [a,b] \to [c,d]$, $\theta \in C^1$ telle que $\gamma = \delta \circ \theta$.

Montrer que
$$\int_\gamma f = \int_\delta f.$$

Exercice 2 (Ex 1 page 11)**.**

(i) Soit $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y = f(x), x \in [a,b]\right\}$, où $f \in C^1([a,b])$. Montrer que
$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt.$$

(ii) En déduire la longueur de la courbe
$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n\colon y = \cosh x,\ x \in [0,1]\}.$$

(iii) Soit $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x(t) = r(t)\cos t,\ y(t) = r(t)\sin t,\ t \in [a,b]\right\}$. Calculer la longueur de Γ en fonction de r.

Exercice 3.
Calculer $\int\limits_\Gamma F \cdot dl$ quand

1. (Ex 2 page 11) $F(x,y) = (xy, y^2 - x)$ et $\Gamma = \{(t,t) : t \in [0,1]\}$.
2. (Ex 3 page 12) $F(x,y,z) = (x,z,y)$ et $\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\right\}$.

Exercice 4.
Soient

$$\Omega_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\Big\}$$

$$\Omega_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\Big\}$$

$$\Omega_3 = \mathbb{R}^2 \backslash \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ et } y = 0\Big\}$$

et

$$f(x,y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} + \pi & \text{si } (x,y) \in \Omega_1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ -\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} & \text{si } (x,y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Montrer que $f \in C^1(\Omega_3)$.

Exercice 5.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé par rapport à x_0. Soit $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$F = F(u) = \Big(F^1(u), \cdots, F^n(u)\Big)$$

satisfaisant, pour tout $x \in \Omega$,

$$\frac{\partial F^i}{\partial u_j}(x) = \frac{\partial F^j}{\partial u_i}(x), \quad \forall\, i,j = 1, \cdots, n.$$

Soit enfin

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0)); x - x_0 \rangle \, dt.$$

Montrer que $F = \operatorname{grad} f$ dans Ω.
Indication : Calculer $\frac{\partial}{\partial t}\left[tF^j(x_0 + t(x - x_0))\right]$.

Exercice 6 (Ex 5 page 18)**.**
Soit l'équation différentielle

$$f_2(t, u(t))\, u'(t) + f_1(t, u(t)) = 0, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Supposons que $F(x,y) := (f_1(x,y),\ f_2(x,y))$ est un champ vectoriel qui dérive d'un potentiel φ sur $\mathbb{R}^2$. Soit une fonction $u \in C^1(\mathbb{R})$ donnée, sous forme implicite, par

$$\varphi(t, u(t)) = \text{constante}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que u est une solution de l'équation (1).
2. Appliquer le point précédent pour trouver une solution du problème

$$\begin{cases} u^2(t) u'(t) + \sin t = 0 \\ u(0) = 3. \end{cases}$$