EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Exercices**
Série 22	16 avril 2018

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant: *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
(Ex 11 page 111)

1. En utilisant les notations complexes, développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique et impaire donnée sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x & \text{si } \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

2. En déduire, pour $a > 0$, l'égalité suivante:

$$\forall\, x \in [-a, a], \quad x = \frac{4}{\pi^2}\, ia \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\, e^{(\pi i x(2k-1))/2a}.$$

3. Calculer

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\,.$$

Exercice 2.
(Ex 14 page 112) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Soient a_n , b_n ses coefficients de Fourier.

1. Montrer que si $f \in C^1$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|a_n|,\ |b_n| \leq \frac{c}{n}\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

2. Plus généralement si $k \geq 1$ et si f est C^k, montrer alors qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|a_n|,\ |b_n| \leq \frac{c}{n^k}\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Exercice 3 (A rendre)**.**
Soient $f, g, h \in L^1(-\pi, \pi)$ des fonctions $2\pi-$périodiques et définissons le *produit de convolution*

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt.$$

Montrer les propriétés suivantes.

1. $f * g \in L^1(-\pi, \pi)$ et
$$\|f * g\|_{L^1} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

2. Symétrie : $f * g = g * f$.

3. Associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$.

4. Si f_n et g_n sont les coefficients **complexes** de Fourier de f et g respectivement, alors les coefficients de Fourier de $f * g$ sont $f_n \, g_n$.

Indication: Utilisez les résultats suivants :
• (Théorème de Fubini-Tonelli). Soit $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mesurable. Si l'une des trois intégrales suivantes est finie

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} |F(x,y)| \, dx \, dy, \quad \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^m} |F(x,y)| \, dy, \quad \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)| \, dx,$$

alors les deux autres sont finies et

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} F(x,y) \, dx \, dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^m} F(x,y) \, dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) \, dx.$$

• Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables, alors la fonction $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) := f(x-y) g(y)$$

est mesurable.

Remarque : Le point 4 est faux pour les coefficients trigonométriques en sinus et cosinus de f et g. Plus précisément, si on écrit

$$f_n^a := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \quad \text{et} \quad f_n^b := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx,$$

alors

$$(f * g)_n^a = \frac{f_n^a \, g_n^a - f_n^b \, g_n^b}{2} \quad \text{et} \quad (f * g)_n^b = \frac{f_n^a \, g_n^b + f_n^b \, g_n^a}{2}.$$

Exercice 4.
Soient $0 \leq r < 1$ et

$$P_r(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}.$$

Montrer que

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}.$$