EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Exercices**
Série 21	9 avril 2018

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant: *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1 (A rendre)**.**
Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\epsilon) - f(x)|^p \, dx = 0$$

Indication: Montrer ce résultat d'abord pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ puis par approximation en utilisant un théorème du cours.

Exercice 2.

1. Soit A un ensemble mesurable avec $\text{mes}(A) < \infty$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \text{mes}((A+\epsilon) \setminus A) = 0.$$

2. Montrer que le résultat du point 1 est faux si $\text{mes}(A) = \infty$.

3. Montrer que le résultat du point 1 est faux si A est non-mesurable (remplacer mes par mes*).

Exercice 3.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction T périodique et $f \in L^1(0,T)$, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(a, a+T)$ et

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx.$$

Exercice 4.
Soient $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $T > 0$, alors

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)dx = 0$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -1 & \text{si } m = -n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 1 & \text{si } m = -n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 5 (Espaces de Hölder)**.**
Soit $-\infty < a < b < \infty$. Pour $f \in C^{0,\alpha}([a,b])$, on note

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])} := \|f\|_{C^0([a,b])} + [f]_{C^{0,\alpha}([a,b])}$$

où

$$[f]_{C^{0,\alpha}([a,b])} := \sup_{a \le x \ne y \le b} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

1. Montrez que $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}$ est une norme sur $C^{0,\alpha}([a,b])$.
2. Soient $f, g \in C^{0,\alpha}([a,b])$, alors $fg \in C^{0,\alpha}([a,b])$.
3. Si $0 \le \alpha \le \beta \le 1$, alors

$$C^1([a,b]) \subset C^{0,1}([a,b]) \subset C^{0,\beta}([a,b]) \subset C^{0,\alpha}([a,b]) \subset C^0([a,b]).$$

Exercice 6.

1. Soient $\alpha \in [0,1]$ et $f_\alpha(x) := x^\alpha$. Montrer que $f_\alpha \in C^{0,\alpha}([0,1])$.

   Indication : considérer $\sup_{t\in(0,1)} \left\{\frac{1-t^\alpha}{(1-t)^\alpha}\right\}$.
2. Montrez que la fonction

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -1/\log x & \text{si } x \in \,]0, 1/2] \end{cases}$$

   est continue, mais n'est pas Hölder continue.

Exercice 7.

1. Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ une suite convergente. Montrez qu'elle est alors convergente au sens de Cesaro. On rappelle qu'une suite est convergente au sens de Cesaro si la suite $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par

$$s_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

converge.

2. Donner un exemple d'une suite convergente au sens de Cesaro mais pas dans le sens usuel.