EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Exercices**
Série 20	27 mars 2018

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant: *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
Soit $f \in L^1(a,b)$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $E \subset \,]a,b[$

$$\operatorname{mes} E \leq \delta \;\Rightarrow\; \int_E |f(x)|\, dx \leq \epsilon.$$

Indication: Considérer la suite $f_\nu(x) := \min\{|f(x)|, \nu\}$.

Exercice 2 (Inégalité de Hölder)**.**
Soient $f \in L^p(a,b)$ et $g \in L^{p'}(a,b)$. Montrer que $f\,g \in L^1(a,b)$ et

$$\int_a^b f\,g \leq \int_a^b |f\,g| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^{p'}\right)^{1/p'},$$

ou qu'en d'autres termes

$$\|f\,g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^{p'}}\ .$$

Suggestion :

1. Montrer que la fonction $\log \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est concave.
2. Montrer l'inégalité de Young: soient $a > 0$, $b > 0$ et $1 < p < \infty$, alors

$$a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p'},$$

   où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Exercice 3 (A rendre)**.**

1. Montrer que $L^p\left(a,b\right),\, 1 \leq p \leq \infty$ est un espace vectoriel sur les réels.

2. Si $-\infty < a < b < +\infty$ et si $1 \leq p < q \leq \infty$ alors $L^q\left(a,b\right) \subset L^p\left(a,b\right)$. Plus précisément, trouver une constante $K = K(a,b,p,q)$ telle que

$$\|f\|_{L^p} \leq K\|f\|_{L^q}.$$

3. Si $-\infty < a < b < +\infty$ et si $f \in L^\infty\left(a,b\right)$, alors $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

   Indication : Montrer les inégalités

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty},$$

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty} - \epsilon, \quad \forall\ \epsilon > 0$$

   en utilisant le point 2 et en considérant l'ensemble

$$A_\epsilon := \{x \in (a,b) :\ |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty} - \epsilon\}.$$

Exercice 4.
Soient $E \subset \mathbb{R}$ mesurable, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose

$$F := aE + b.$$

1. Montrer que F est mesurable et

$$\mathrm{mes}(F) = |a|\,\mathrm{mes}(E).$$

   Indication: Commencez par montrer que $\mathrm{mes}^*(aE) = |a|\,\mathrm{mes}^*(E)$ pour tout $E \subset \mathbb{R}$.

2. Soient $f \in L^1(F)$ et

$$g(x) := f(ax+b),\ \ x \in E.$$

   Montrez que $g \in L^1(E)$ et que

$$|a|\int_E g = \int_F f.$$

Exercice 5.
Pout tout $\nu > 0$, on définit

$$h(\nu) := \max\{k \in \mathbb{N} : 2^k \leq \nu\}, \quad I_\nu := \{\frac{\nu - 2^{h(\nu)}}{2^{h(\nu)}}\} + [0, 1/2^{h(\nu)}], \quad f_\nu := \chi_{I_\nu}.$$

Explicitement, $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$, $f_4 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_5 = \chi_{[1/4,2/4]}$, $f_6 = \chi_{[2/4,3/4]}$, $f_7 = \chi_{[3/4,1]}$, $f_8 = \chi_{[0,1/8]}, \cdots$.

1. Montrer que f_ν converge dans $L^p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$.

2. Montrer que f_ν ne converge (ponctuellement) nulle part sur $[0,1]$.

3. Trouver une sous-suite de f_ν qui converge presque partout sur $[0,1]$