EPFL - Automne 2016	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 1	27 septembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1 (Ex 5 page 7)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Montrer les affirmations suivantes.

1. Si $f \in C^2(\Omega)$ alors
$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f.$$
2. Si $n = 3$, $f \in C^2(\Omega)$ et $F \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ alors
$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} F &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 2 (Ex 2 page 7)**.**
Soient une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ et un champ vectoriel $F \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Dire, parmi les expressions suivantes, celles qui ont un sens

i) $\operatorname{grad} f$	ii) $f \operatorname{grad} f$	iii) $\langle F; \operatorname{grad} f \rangle$	iv) $\operatorname{div} f$
v) $\operatorname{div}(fF)$	vi) $\operatorname{rot}(fF)$	vii) $\operatorname{rot} f$	viii) $f \operatorname{rot} F$
ix) $\operatorname{rot} \operatorname{div} F$,			

où $\langle x; y \rangle$ dénote le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 3 (Ex 6 et 7 page 7)**.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Montrer les affirmations suivantes.

1. Si $f, g \in C^1(\Omega)$ alors
$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f.$$
2. Si $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ alors
$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + \langle F; \operatorname{grad} f \rangle.$$

3. Si $f \in C^1(\Omega)$ et $g \in C^2(\Omega)$ alors
$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f\,\Delta g + \langle \operatorname{grad} f; \operatorname{grad} g\rangle .$$
4. Si $n = 3$ et $F \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ alors
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad}\operatorname{div} F,$$
où, si $F = (F^1, F^2, F^3)$, on a noté $\Delta F = (\Delta F^1, \Delta F^2, \Delta F^3)$.
5. Si $n = 3$, $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ alors
$$\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F,$$
où $x \wedge y$ dénote le produit vectoriel de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (À rendre, Ex 4 page 7)**.**
Soit $f \in C^2(\Omega)$, où
$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0\Big\}.$$

1. Montrer que, si
$$g(r, \theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(x, y),$$
alors
$$\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \Delta f(x, y).$$
2. Calculer Δf pour
$$f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} + \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2 .$$

Exercice 5.
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple et régulière telle qu'il existe $\gamma\colon [a, b] \to \Gamma$ et $\delta\colon [c, d] \to \Gamma$ bijectives et avec $\gamma(a) = \delta(c)$, $\gamma(b) = \delta(d)$, $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et $\delta'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [c, d]$.

Supposons de plus qu'il existe $\theta\colon [a, b] \to [c, d]$, $\theta \in C^1$ telle que $\gamma = \delta \circ \theta$.

Montrer que
$$\int_\gamma f = \int_\delta f.$$

Exercice 6 (Ex 1 page 11)**.**

(*i*) Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = f(x), x \in [a, b]\}$. Montrer que

$$\text{longueur}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

(*ii*) En déduire la longueur de la courbe

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \colon y = \cosh x,\ x \in [0, 1]\}.$$

(*iii*) Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x(t) = r(t)\cos t,\ y(t) = r(t)\sin t,\ t \in [a, b]\}$. Calculer la longueur de Γ en fonction de r.

Exercice 7.
Calculer le jacobien des changements de variable suivants.

1. *Coordonnées polaires.* Pour $n = 2$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1(r, \theta) = r\cos(\theta), \\ x_2 &= u_2(r, \theta) = r\sin(\theta). \end{aligned}$$

2. *Coordonnées sphériques.* Pour $n = 3$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1(r, \theta, \phi) = r\cos(\theta)\sin(\phi), \\ x_2 &= u_2(r, \theta, \phi) = r\sin(\theta)\sin(\phi), \\ x_3 &= u_3(r, \theta, \phi) = r\cos(\phi). \end{aligned}$$

3. *Coordonnées cylindriques.* Pour $n = 3$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1(r, \theta, z) = r\cos(\theta), \\ x_2 &= u_2(r, \theta, z) = r\sin(\theta), \\ x_3 &= u_3(r, \theta, z) = z. \end{aligned}$$

En déduire l'aire d'un disque, le volume d'une sphère et le volume d'un cylindre.