EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Exercices**
Série 19	20 mars 2018

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant: *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.

1. Montrer que si $f, g \geq 0$ sont mesurables, alors
$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

2. Montrer que si $f_\nu \geq 0$ sont mesurables, alors
$$\int \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu \,.$$

Exercice 2.
Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est convexe.

(ii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)\,.$$

(iii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
$$(f'(y) - f'(x))(y-x) \geq 0.$$

Si, de plus, $f \in C^2(\mathbb{R})$, alors (i)-(iii) sont équivalents à

(iv) $f'' \geq 0$.

Indication : $\int_x^y f'(t)dt = f(y) - f(x)$.

Definition 1 (Support d'une fonction)**.**
Soient $k \geq 0$ entier, $\Omega \subset \mathbb{R}$ ouvert et $f \in C^k(\Omega)$. Le *support* de f est l'ensemble

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

On dit que f est *à support compact* dans Ω si

$$\operatorname{supp}(f) \subset \Omega \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(f) \text{ est borné.}$$

On note $f \in C_0^k(\Omega)$. Par convention, on prolonge continuement par $f \equiv 0$ à l'extérieur de Ω.

Definition 2 (Suite régularisante)**.**
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi \geq 0, \quad \varphi(x) = 0 \ \text{ si } \ |x| > 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1.$$

On appelle *suite régularisante* la suite $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\varphi_\nu(x) := \nu\varphi(\nu x).$$

Une telle suite est, par exemple, donnée par

$$\varphi(x) := \begin{cases} c\exp\left\{\dfrac{1}{x^2-1}\right\} & \text{si } \ |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est choisie de manière à avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\, dx = 1$.

Exercice 3 (A rendre)**.**
Soient $f \in C_0(a,b)$, $\{\varphi_\nu\}$ une suite régularisante et

$$f_\nu(x) := (\varphi_\nu * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x-y) f(y)\, dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $f_\nu \in C^\infty(a,b)$ pour tout $\nu \geq 1$ et que $f_\nu \in C_0^\infty(a,b)$ pour tout ν assez grand.

   Indication : $\operatorname{supp}(f) \subset (a,b) \iff \exists\, \epsilon > 0,\ \forall\, x \in\,]-\infty, a+\epsilon[\, \cup\,]b-\epsilon, \infty[,\ f(x) = 0$.

2. Pour tout $\nu \geq 1$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\nu(x)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

3. Montrer que $f_\nu \to f$ uniformément. En déduire un résultat de densité entre espaces de fonctions.

Exercice 4 (Ensemble de Cantor)**.**
On commence par définir

$$P_0 := [0,1]\,,$$

$$P_1 := [0,1/3] \cup [2/3,1]\,,$$

$$P_2 := [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$$

et ainsi de suite (à chaque étape on enlève à chacun des intervalles précédents de longueur $1/3^k$ un intervalle de longueur $1/3^{k+1}$) de manière à avoir

$$\cdots \subset P_{k+1} \subset P_k \subset \cdots \subset P_2 \subset P_1 \subset P_0\,.$$

L'ensemble de Cantor est défini comme

$$P := \bigcap_{k=0}^{\infty} P_k\,.$$

Montrer les propriétés suivantes.

1. P est compact.
2. P est mesurable et de mesure nulle.
3. $P = \{a \in [0,1] :\ a = 0, a_1 a_2 \cdots \text{ avec } a_i \in \{0,2\}\}$.
4. P est indénombrable.