EPFL - Printemps 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Exercices**
Série 18	13 mars 2018

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant: *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
Soit $x \in [0,1]$. On rappelle que $(a_n)_{n=1}^{\infty}, a_n \in \{0,1,2\}$, est un développement ternaire de x si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

On adopte l'identification suivante:
s'il existe $k \geq 2$ tel que $a_n = 2$ pour tout $n \geq k$ et $a_{k-1} < 2$ alors on identifie le développement

$$0, a_1 \cdots a_{k-1} 2 \cdots 2$$

à

$$0, a_1 \cdots (a_{k-1}+1) 0 \cdots 0.$$

Montrer par l'absurde que, modulo cette identification, le développement ternaire d'un nombre $\in [0,1]$ est unique.

Exercice 2 (A rendre)**.**

1. Soient φ, ψ deux fonctions simples et mesurables. Montrer que

$$\psi \leq \varphi \quad \Rightarrow \quad \int \psi \, dx \leq \int \varphi \, dx,$$

   où l'intégrale est ici celle définie pour les fonctions simples.

2. Montrer que pour les fonctions simples, les deux définitions d'intégrales données au cours coïncident (celle pour les fonctions simples et celles pour les fonctions non négatives).

Exercice 3.
Soit φ une fonction simple et mesurable. Montrer les assertions suivantes.

1. Pour tout E mesurable

$$\int_E \varphi \, dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{mes}(A_i \cap E).$$

2. Pour tout $a > 0$
$$\int a\varphi \, dx = a \int \varphi \, dx.$$
3. Soient E_i des ensembles mesurables deux à deux disjoints et
$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \, .$$
Alors
$$\int_E \varphi \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi \, dx.$$

Exercice 4.

1. Si $0 \leq f \leq g$ sont mesurables sur un ensemble mesurable A, alors
$$\int_A f \, dx \leq \int_A g \, dx.$$
En particulier si $A = \mathbb{R}$, alors
$$\int f \leq \int g.$$
2. Si $a \geq 0$ et $f \geq 0$ est mesurable, alors
$$a \int f \, dx = \int af \, dx.$$
3. Si $A \subset B$ sont mesurables et $f \geq 0$ est mesurable, alors
$$\int_A f \, dx \leq \int_B f \, dx.$$
4. Si $\operatorname{mes}(A) = 0$ et $f \geq 0$ est mesurable, alors
$$\int_A f \, dx = 0.$$

Exercice 5.
Donner un exemple où l'inégalité est stricte dans le Lemme de Fatou.

Exercice 6.
Soient φ mesurable et f continue. Montrer que $f \circ \varphi$ est mesurable. (Par contre, en général, $\varphi \circ f$ n'est pas mesurable.)