EPFL - Printemps 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Exercices**
Série 17	6 mars 2018

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant: *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1 (A rendre)**.**
Soit $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ensembles. On définit, respectivement, la *limite inférieure* et *la limite supérieure* de cette suite par

$$\liminf_{n\to\infty} E_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq m} E_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq m} E_n\,.$$

Si ces deux limites sont égales on écrit simplement $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

1. Se convaincre que
   - $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} E_n$ si et seulement si x appartient à tous les E_n, sauf en un nombre au plus fini,
   - $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ si et seulement si x appartient à une infinité de E_n.
2. Montrer que
$$\liminf_{n\to\infty} E_n \subset \limsup_{n\to\infty} E_n\,.$$
3. Donner un exemple d'une suite d'ensembles $\{E_n\}$ telle que
$$\liminf_{n\to\infty} E_n \neq \limsup_{n\to\infty} E_n.$$
4. Montrer que si $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$, alors
$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$
   et si de plus ils sont tous mesurables, alors
$$\operatorname{mes}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}(E_n)$$

5. Montrer que si $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, alors
$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$
et si de plus ils sont tous mesurables avec $\mathrm{mes}(E_1) < \infty$, alors
$$\mathrm{mes}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{mes}\left(E_n\right).$$
Montrer que si $\mathrm{mes}(E_1) = \infty$, alors l'égalité précédente n'est en général plus vérifiée.

Definition 1.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. f est *semi-continue inférieurement* en $x_0 \in \mathbb{R}$ si
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0, \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x_0) - f(x) \leq \epsilon.$$
2. f est *semi-continue inférieurement* si f est semi-continue inférieurement en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. f est *semi-continue supérieurement* en $x_0 \in \mathbb{R}$ si
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0, \quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) - f(x_0) \leq \epsilon.$$
4. f est *semi-continue supérieurement* si f est semi-continue supérieurement en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement, respectivement semi-continue supérieurement, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les ensembles
$$G_\alpha := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}, \quad \text{respectivement} \quad F_\alpha := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$$
sont fermés.
2. En déduire qu'une fonction semi-continue inférieurement ou supérieurement est mesurable.

Exercice 3.
Montrer qu'une fonction croissante ou décroissante est mesurable.

Exercice 4.
Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurables. Montrer que les fonctions

$$f^2, \quad fg, \quad |f|$$

sont mesurables.

Exercice 5 (Développement ternaire)**.**
Pour tout $\{a_i\}_{i\geq 1}$ avec $a_i \in \{0,1,2\}$, on note $0, a_1 a_2 a_3 \cdots$ le nombre

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}.$$

Considérons la construction inductive suivante : pour tout $a \in [0,1]$, on pose

$$\begin{cases} a_1 := \lfloor 3a \rfloor, & \\ \widetilde{a}_i := \displaystyle\sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{3^n}, & i \geq 1, \\ a_{i+1} := \lfloor 3^{i+1}(a - \widetilde{a}_i) \rfloor, & i \geq 1. \end{cases}$$

avec

$$\lfloor y \rfloor := \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} : n < y\}, & \text{si } y > 0; \\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout i,

   $$0 \leq a - \widetilde{a}_i \leq \frac{1}{3^i}$$

   et en déduire que tout $a \in [0,1]$ s'écrit de la forme $0, a_1 a_2 \cdots$ avec $a_i \in \{0,1,2\}$.

2. Montrer que pour tout $a_i \in \{0,1,2\}$, alors $0, a_1 a_2 \cdots \in [0,1]$.

3. Montrer que le développement ternaire d'un nombre n'est en général pas unique.

   Indication : $1 = 0.9999...$