EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Exercices**
Série 16	27 février 2018

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant: *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
(*Corollaire du Théorème de Lindelöf*) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Montrer que Ω est l'union, au plus dénombrable, d'intervalles ouverts disjoints.

Indication : Considérer la relation d'équivalence $\sim$ définie sur Ω par

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad [a,b] \subset \Omega \quad \text{ou} \quad [b,a] \subset \Omega,$$

et montrer que les classes d'équivalence sont des intervalles ouverts.

Exercice 2.
Soient $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ et $\epsilon > 0$. Trouver un ouvert $O \supset A$ tel que

$$\text{mes}^*(O) \leq \epsilon.$$

Exercice 3.

1. Montrer que si $\text{mes}^*(E) = 0$, alors E est mesurable.
2. Montrer qu'un ensemble dénombrable a une mesure extérieure nulle.
3. En déduire qu'un ensemble dénombrable est mesurable.

Exercice 4 (A rendre)**.**
Montrer que la notion de mesure extérieure est la même si on choisit les intervalles de recouvrement ouverts, fermés ou semi-ouverts.