EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Exercices**
Série 15	20 février 2018

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant: *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
(i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c, \quad f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$$

$$\left[A \bigcap (B \bigcup C)\right] \bigcap B = A \bigcap B, \quad \left[A \bigcap (B \bigcup C)\right] \bigcap B^c = A \bigcap B^c \bigcap C$$

$$B \subset A \quad \Rightarrow \quad B = A \setminus (A \setminus B)$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [A_i \setminus B_i], \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{i} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right].$$

Exercice 2.
Soient $J_n =]c_n, d_n[$ tels que

$$]a, b[\subset [a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{N} J_n .$$

Montrer qu'alors

$$b - a \leq \sum_{n=1}^{N} \operatorname{long}(J_n) .$$

Indications. (i) Supposer et justifer que, sans perte de généralité, aucun J_n n'est contenu dans un autre J_m et que $J_n \cap [a, b] \neq \emptyset$.

(ii) Ordonner les c_n . En déduire un ordre pour les d_n et montrer l'inégalité

$$c_{n+1} \leq d_n , \quad \forall\, n = 1, \cdots , N - 1.$$

Exercice 3 (Théorème de Lindelöf, à rendre)**.**
Montrer que si

$$\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

est une collection d'intervalles ouverts, alors il existe une sous-collection, au plus dénombrable $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

Indication: Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.