EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 14	18 décembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1 (Principe de l'argument)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f une fonction holomorphe sur Ω et non-constante.

1. Soit $z_0 \in \Omega$ un zéro d'ordre (multiplicité) $k \geq 1$ de f. Calculer le résidu de la fonction f'/f en z_0.
2. En déduire la formule

   $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \{\text{nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de } f \text{ à l'intérieur de } \gamma\}\,,$$

   où $\gamma \subset \Omega$ une courbe simple fermée et régulière telle que f ne s'annule pas sur γ.

Remarque. Ce résultat peut se généraliser à des fonctions f méromorphes. Dans ce cas, la formule devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} \;=\;& \{\text{nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de } f \text{ à l'intérieur de } \gamma\}\\ &- \{\text{nombre de pôles (comptés avec leur ordre) de } f \text{ à l'intérieur de } \gamma\}\,.\end{aligned}$$

Exercice 2 (Théorème de Rouché)**.**
Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f, g des fonctions holomorphes sur Ω. Soit une courbe γ simple, fermée, régulière par morceaux, telle que $\gamma \cup \operatorname{int}(\gamma) \subset \Omega$. Montrer que si

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall\, z \in \gamma,$$

alors f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans $\operatorname{int}(\gamma)$.

Indications : Posant $f_t(z) := f(z) + tg(z)$, pour $t \in [0, 1]$, et n_t le nombre de zéros de f_t dans $\operatorname{int}(\gamma)$, montrer, à l'aide de l'exercice 1, que n_t est une fonction **continue** en t et conclure.

Exercice 3.
Dans cet exercice, on montre le résultat suivant.

Proposition 1.
Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un ouvert et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe et injective. Alors*
$$f'(z) \neq 0, \quad \forall\, z \in \Omega.$$

On propose de procéder en montrant les cinq assertions suivantes. Les assertions 1 à 4 sont indépendantes les unes des autres, on les utilisera pour montrer l'assertion 5, qui est la proposition ci-dessus.

1. Soient $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et non constante et $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) = 0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.
2. Soit $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $r > 0$ tels que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Montrer que les zéros de la fonction $f(z) - f(z_0) - w$ sont d'ordre au plus 1 dans $B_r(z_0)$.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k \geq 1$ un entier et $r > 0$ tels que $|w| < |\lambda| \frac{r^k}{2}$. Définissons $h_w\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ par $h_w(z) = \lambda (z - z_0)^k - w$. Montrer que h_w a k zéros dans $B_r(z_0)$.
4. Soient $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k \geq 1$ un entier et $(c_n)_{n=k+1}^{\infty}$ tels que la série
$$F(z) = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$
a un rayon de convergence non nul. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que
$$|F(z)| < |\lambda| \frac{r^k}{2}$$
pour tout $z \in B_r(z_0)$.
5. Montrer le résultat en procéd CH ant par l'absurde et en étudiant
$$f(z) - f(z_0) - w = h_w(z) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$
à l'aide du théorème de Rouché et où z_0 est tel que $f'(z_0) = 0$.

Exercice 4.
Soit l'équation
$$v'' + a(z)\, v' + b(z)\, v = 0.$$
Montrer que si
$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad u(t) = v\left(\frac{1}{t}\right)$$

alors l'équation devient

$$t^2u'' + t\left[2 - \frac{1}{t}a\left(\frac{1}{t}\right)\right]u' + \frac{1}{t^2}b\left(\frac{1}{t}\right)u = 0.$$

Exercice 5.
Classer les singularités (y compris à l'infini) des équations suivantes.

1. L'équation *hypergéométrique confluente*

$$zu'' + (c - z)\,u' - au = 0.$$

2. L'équation d'*Airy*

$$u'' + zu = 0.$$

3. L'équation de *Legendre*

$$\left(1 - z^2\right)u'' - 2zu' + \alpha\,(\alpha + 1)\,u = 0.$$

4. L'équation de *Laguerre*

$$zu'' + (1 - z)\,u' + \alpha u = 0.$$

5. L'équation d'*Hermite*

$$u'' - 2zu' + \alpha u = 0.$$

Exercice 6.
Trouver la solution en série entière de

$$\begin{cases} u'' + zu = 0, \\ u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1. \end{cases}$$

Donner aussi le rayon de convergence de la série.