EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 13	11 décembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
Soient

$$\Omega_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < 1 \right\}, \quad \Omega_2 = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi \} .$$

Trouver une transformation de Möbius qui envoie Ω_1 sur Ω_2.

Indication : Il existe une méthode plus directe que celle qui consiste à « envoyer le bord sur le bord ».

Exercice 2.
(Ex 1 page 98). Soient $z = x + iy$ et

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

1. Trouver $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$ en fonction de x et y.
2. Trouver x et y en fonction de u et v.
3. Soient

   a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$ *b)* $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\}$

   c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$ *d)* $A_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 2\}$

   Trouver l'image par f de ces ensembles (dire ce que représentent géométriquement A_i et $f(A_i)$).
4. Montrer plus généralement que la transformation $z \to 1/z$ envoie des cercles et des droites sur des cercles et des droites.

Exercice 3.
(Ex 10 page 99). Montrer, à l'aide du théorème de Liouville qu'il n'existe pas d'application conforme de $\mathbb{C}$ sur le disque unité.

Exercice 4.
(Ex 6 page 98). Soit la transformation de Joukowski donnée par

$$f(z) = z + \frac{1}{z}\,.$$

1. Calculer $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Calculer l'image par f du cercle $|z| = a$, $a > 0$.

Exercice 5 (Préservation des angles par une application conforme)**.**
Soit f une application conforme sur Ω. Soient $z_0 \in \Omega$ et $c, d \in C^1((-\epsilon, \epsilon), \Omega)$ avec $c(0) = d(0) = z_0$, $c'(0), d'(0) \neq 0$.

1. Montrer que

$$(f \circ c)'(t) = f'(c(t))c'(t), \quad \forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

2. En déduire

$$\frac{d'(0)}{c'(0)} = \frac{(f \circ d)'(0)}{(f \circ c)'(0)}.$$

Exercice 6.
Soit l'équation

$$v'' + a\,(z)\,v' + b\,(z)\,v = 0.$$

Montrer que si

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad u\,(t) = v\left(\frac{1}{t}\right)$$

alors l'équation devient

$$t^2 u'' + t\left[2 - \frac{1}{t} a\left(\frac{1}{t}\right)\right] u' + \frac{1}{t^2} b\left(\frac{1}{t}\right) u = 0.$$

Exercice 7.
(i) Trouver une solution sous forme de série entière de l'équation hypergéométrique

$$z\,(1 - z)\,u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,z]\,u' - \alpha\beta u = 0,$$

donner le rayon de convergence de cette série.
(ii, À rendre) Trouver une solution sous forme de série entière de l'équation de Bessel

$$z^2 u'' + z u' + \left(z^2 - n^2\right) u = 0$$

quand $n = 0$, donner le rayon de convergence de cette série.