EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 12	4 décembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
Soit $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière telle que, pour un certain $r > 0$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < |a_1|.$$

1. Montrer que f possède un rayon de convergence supérieur ou égal à r.
2. Montrer que, pour $|w|, |z| \leq r$,
$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} w^j\right)\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}.$$
3. Montrer que f est injective sur $B(0, r)$, en utilisant le point précédent et la formule
$$z^n - w^n = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}.$$
4. Déduire du point précédent que si une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfait $f'(z_0) \neq 0$ pour un $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est injective.

Exercice 2.
(Ex 9 page 93) Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(5\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} d\theta.$$

Exercice 3 (**Lemme de Riemann**)**.**
Soit f une fonction holomorphe et bornée sur $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

1. Montrer que la fonction
$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & : z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & : z = z_0 \end{cases}$$
est holomorphe sur $B_r(z_0)$.

2. En déduire que f peut s'étendre en une fonction homolomorphe sur $B_r(z_0)$.

Exercice 4 (À rendre)**.**

1. Soit f une fonction holomorphe sur $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, $r > 0$. Montrez alors que z_0 est un pôle de f si et seulement si $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.
2. Que se passe-t-il pour $f(z) := e^{1/z}$ et $z_0 = 0$?

Exercice 5.
(Ex 3 et 7 pages 98 et 99).

1. Trouver une transformation de Möbius de
$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$
sur
$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$
2. Montrer que la fonction $f(z) := e^z$ est conforme de
$$A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$
sur
$$\Omega := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}.$$
3. En utilisant les deux questions précédentes, trouver une application conforme de A sur le disque unité D.