EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 11	27 novembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
(Ex 1, 6, 8 et 12 page 84) Trouver la série de Laurent de f (ou en tous cas quelques-uns de ses termes) en précisant la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence dans les cas suivants.

1. $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$ en $z_0 = 0$,
2. $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 1}{z + 1}$ en $z_0 = -1$,
3. $f(z) = \dfrac{1}{(1 - z)^3}$ en $z_0 = 1$,
4. $f(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{z^2 - 1}$ en $z_0 = 1$,
5. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ en $z_0 = 0$,
6. $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ en $z_0 = 1$,
7. $f(z) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} z\right)}$ en $z_0 = 1$,
8. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z - \pi)^2}$ en $z_0 = \pi$.

Exercice 2.
(Ex 2 page 92) Soit γ une courbe simple fermée régulière par morceaux. Discuter en fonction de γ la valeur des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z - i)(z + 2)^2(z - 4)} dz$,
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2 + 2z + 1}{(z - 3)^3} dz$,

3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}dz.$

Exercice 3.
Soit Ω un ouvert simplement connexe, et f une fonction holomorphe dans Ω telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, il existe une fonction holomorphe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $g^n = f$.

Indication. Utiliser l'exercice 7 de la série 8.

(ii) Trouver un contre-exemple au point (i) si f s'annule ou si Ω n'est pas simplement connexe.

Exercice 4 (À rendre)**.**
Soit f une fonction holomorphe non constante sur $\mathbb{C}$.

(i) Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Indication : Procéder par l'absurde en utilisant le théorème de Liouville.

Remarque : En fait, on peut montrer le résultat suivant (grand théorème de Picard) : toute fonction holomorphe non constante sur $\mathbb{C}$ atteint tout point de $\mathbb{C}$, sauf au plus un.

(ii) Supposons que $w_0 \in \mathbb{C}$ soit tel que $w_0 \notin f(\mathbb{C})$. Montrer qu'alors, il existe une fonction h holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = e^{h(z)} + w_0.$$

Exercice 5.
(Ex 3 page 93) Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}.$$

Indications :

1. Appliquer le théorème des résidus sur la fonction $f(z) = 1/\cosh(z)$ et sur le bord du rectangle $(-R, R) \times (0, \pi)$.
2. Montrer que

$$\lim_{R\to\pm\infty} \frac{1}{\cosh(R+it)} = 0 \quad \text{uniformément en } t \in [0, \pi].$$