EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 10 bis	20 novembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $g : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}$, $g = g(z,t)$, une fonction bornée, telle que

$$g : \Omega \times \left]0,1\right[\to \mathbb{C} \text{ est continue}$$

et

$$z \mapsto g(z,t) \text{ est holomorphe dans } \Omega, \text{ pour tout } t \in [0,1]\,.$$

Montrer que la fonction

$$f(z) := \int_0^1 g(z,t)\,dt$$

est holomorphe dans Ω.

Indication : Se rappeler de la construction l'intégrale de Riemann (sommes de Darboux), et appliquer le théorème de Weierstrass.

Exercice 2.
Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$ on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,a}(z-a)^n.$$

On suppose que pour tout $a \in \mathbb{C}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_{n,a} = 0$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit l'ensemble

$$A_n := [a \in B : c_{n,a} = 0]\,,$$

   où $B \subset \mathbb{C}$ est le disque unité. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que A_m soit non-dénombrable.
2. Appliquer le théorème du prolongement analytique sur $f^{(m)}$ pour en déduire que f est un polynome.

Exercice 3.
Soit $f(z) = p(z)/q(z)$, où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

— z_0 est un zéro d'ordre k de p, i.e. (si $p(z_0) \neq 0$ on pose $k = 0$)

$$p(z_0) = \cdots = p^{(k-1)}(z_0) = 0, \text{ mais } p^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

— z_0 est un zéro d'ordre l de q, i.e. (si $q(z_0) \neq 0$ on pose $l = 0$)

$$q(z_0) = \cdots = q^{(l-1)}(z_0) = 0, \text{ mais } q^{(l)}(z_0) \neq 0.$$

1. Si $l \leq k$, montrez que z_0 est un point régulier de f.
2. Si $l > k$, montrez que z_0 est un pôle d'ordre $l - k$ de f.

Exercice 4.
Soit $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ et telles que $p(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de q (i.e. d'ordre 1). Montrer que

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Exercice 5.
Soit f holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et paire, i.e $f(z) = f(-z)$. Montrer que $\text{Rés}_0(f) = 0$.

Exercice 6.
(Ex 1, page 84) Trouver la série de Laurent de f (ou en tous cas quelques-uns de ses termes) en précisant la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence dans les cas suivants.

1. $f(z) = \sin z$ en $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$,
2. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$ en $z_0 = 0$,
3. $f(z) = \dfrac{z}{1 + z^2}$ en $z_0 = 1$,