EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Exercices**
Série 10	20 novembre 2017

Remarque.
Tous les exercices commençant par "(Ex xx page xx)" proviennent du livre suivant : *Analyse avancée pour ingénieurs*, B. Dacorogna and C. Tanteri, PPUR. Les corrigés de ces exercices s'y trouvent également.

Exercice 1.
Soit Ω un ouvert simplement connexe, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe dans Ω telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Soit γ_z une courbe simple et régulière par morceaux telle que $\gamma_z \subset \Omega$ joignant z_0 à un point quelconque $z \in \Omega$. On définit alors

$$F(z) = \log[f(z_0)] + \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw$$

où la fonction log est la détermination principale du logarithme définie au cours, i.e.

$$\log z = \log|z| + i(\arg z) \quad \text{avec } -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Que donne la construction ci-dessus dans le cas où $f(z) = z$, $z_0 = -1$ et

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

Remarque : En général, il n'existe pas de détermination du logarithme telle que $F = \log \circ f$. Voir par exemple $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) < 0\}$, $f(z) = z^2$, où $F(-1) \neq F(1)$ malgré le fait que $f(-1) = f(1)$.

Exercice 2.
(Ex 1, 2, 4, 5 pages 75-76). Soit γ une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter, en fonction de γ, la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{2z} dz, \ \int_\gamma \frac{z^2 \sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz, \ \int_\gamma \frac{dz}{z^2}, \ \int_\gamma \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz.$$

Exercice 3.
(Ex 7 page 76). Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_\gamma \frac{3z^2 + 2z + \sin(z+1)}{(z-2)^2}\, dz \quad \text{avec } \gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\},$$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)}\, dz \quad \text{avec } \gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Exercice 4.
(Ex 8 page 76). Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)}\, dz$$

dans les cas suivants :

1. γ est le cercle centré en $(1,0)$ et de rayon 1,
2. γ est le bord du rectangle $[-1/2, 1/2] \times [0,4]$,
3. γ est le bord du rectangle $[-2,0] \times [-1,1]$.

Exercice 5.
Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Indication : Utiliser le Théorème de Cauchy pour la fonction

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$$

et la frontière du domaine

$$D_{\epsilon,R} := \{z \in \mathbb{C} : \ \epsilon < |z| < R; \ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

Utiliser également

$$\begin{cases} \sin(t) \geq t/2 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi/6 \\ \sin(t) \geq 1/2 & \text{si} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

Exercice 6 (**Intégrales de Fresnel**,À rendre)**.**
Montrer que

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right)\, dx = \int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Indication : Utiliser le Théorème de Cauchy pour la fonction

$$f(z) := e^{iz^2}$$

et la frontière du domaine

$$D_R := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq R, \ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Utiliser également

$$\begin{cases} \sin(t) \geq t/2 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi/6 \\ \sin(t) \geq 1/2 & \text{si} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/2. \end{cases}$$

Exercice 7 (Conjugé harmonique).
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et simplement connexe. Soit $u \in C^2(\Omega)$ (où Ω est vu dans $\mathbb{R}^2$) tel que $\Delta u = 0$ dans Ω.

1. Montrer qu'il existe $v \in C^1(\Omega)$ telle que $u + iv$ soit holomorphe sur Ω. En déduire qu'en fait $u, v \in C^\infty(\Omega)$.
2. Que peut-on dire sur l'unicité d'un tel v ?
3. Tester les deux points précédents avec $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et

$$u(x,y) := \log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$