| | |
|---|---|
| EPFL - Automne 2017 | Prof. B. Dacorogna |
| **Analyse III (MA)** | **Corrigé** |
| Série 9 | 13 novembre 2017 |

**Exercice 1.**
Soient $a, b \in \Omega$. Comme $\Omega$ et connexe et ouvert, il est connexe par arc. Il existe donc un chemin régulier $\gamma$ de $a$ à $b$ dont l'image est dans $\Omega$. Comme $f$ est une primitive de $f'$, on a par la proposition 9.3 que

$$f(b) - f(a) = \int_\gamma f' = \int_\gamma 0 = 0.$$

Il s'ensuit que $f(b) = f(a)$ pour tout $a, b \in \Omega$ et donc $f$ est constante.

**Exercice 2.**
Quand $f(z) = z$, $z_0 = 1$ et

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

on trouve ($\gamma_z \subset \Omega$)

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w}\,.$$

Soient les courbes

$$\{\gamma_1(t) = 1 + t(|z| - 1)\,,\ t \in [0,1]\} \quad \text{et} \quad \left\{\gamma_2(t) = |z|\, e^{i\,t \arg z},\ t \in [0,1]\right\}.$$

On remarque que

$$\gamma_1(0) = 1, \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = |z| \quad \text{et} \quad \gamma_2(1) = z$$

et donc la courbe $\gamma_z = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \subset \Omega$ est une courbe simple et régulière par morceaux joignant 1 à $z$ et passant par $|z|$. On déduit donc que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} &= \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w} = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)}\, dt + \int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{(|z| - 1)\, dt}{1 + t(|z| - 1)} + \int_0^1 \frac{i\,|z| \arg z\, e^{i\,t \arg z}}{|z|\, e^{i\,t \arg z}}\, dt = \log|z| + i \arg z = \log z\end{aligned}$$

et par conséquent $F(z) = \log z$, à savoir la détermination principale du logarithme donnée au cours.

**Exercice 3.**
D'abord, si $n \geq 0$, alors $z^n$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et donc $I = 0$ pour tout $a$ et $r$, par le théorème de Cauchy. Si $n = -k < 0$, alors $z^n$ admet une singularité en 0. Il y a trois cas à traiter.

1. Si $r < |a|$, alors $0 \notin \gamma_{a,r} \cup \mathrm{int}(\gamma_{a,r})$ et donc le théorème de Cauchy nous dit que $I = 0$.
2. Si $r = |a|$, alors $0 \in \gamma_{a,r}$ et $I$ est mal définie.
3. Si $r > |a|$, alors $0 \in \mathrm{int}(\gamma_{a,r})$ et la formule intégrale de Cauchy nous donne, en posant $f \equiv 1$,
$$\frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{1}{z^k} dz = f^{(k-1)}(0).$$
Donc $I = 2\pi i$ si $n = -1$, et $I = 0$ si $n < -1$.

En résumé,
$$I(n, a, r) = \begin{cases} \text{indéfini} & \text{si } n < 0 \text{ et } r = |a| \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \text{ et } r > |a| \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

**Exercice 4.**
Comme $b \notin \mathrm{int}\,\gamma$ mais $a \in \mathrm{int}\,\gamma$, nous appliquons directement la formule intégrale de Cauchy à la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-b)}$, ce qui nous donne
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) = \frac{1}{(a-b)},$$
d'où le résultat.