EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 8	6 novembre 2017

Exercice 1.

1. Soit $z = x + iy$. On rappelle que

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{et} \quad \log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z,\ z \neq 0.$$

D'une part, comme $y \in]-\pi, \pi]$, alors $\operatorname{Arg} e^z = y$ et donc

$$\log e^z = \log|e^z| + i \operatorname{Arg} e^z = x + iy = z.$$

D'autre part,

$$e^{\log z} = e^{\log|z|} e^{i \operatorname{Arg} z} = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = z.$$

2. On définit l'argument de $z \in \mathbb{C}$ comme étant le seul scalaire $\operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ tel que l'on puisse écrire

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)}.$$

Ainsi,

$$zw = |z|e^{i \operatorname{Arg}(z)} |w| e^{i \operatorname{Arg}(w)} = |zw| e^{i(\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w))},$$

et donc, puisque la fonction $t \mapsto e^{it}$ est 2π-périodique,

$$\operatorname{Arg}(zw) = \begin{cases} \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) & \text{si } \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \in]-\pi, \pi] \\ \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) - 2\pi & \text{si } \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \in]\pi, 2\pi] \\ \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) + 2\pi & \text{si } \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \in]-2\pi, -\pi]\,. \end{cases}$$

En utilisant

$$\log(zw) = \log|zw| + i \operatorname{Arg}(zw) = \log|z| + \log|w| + i \operatorname{Arg}(zw),$$

on obtient directement le résultat.

3. La faute est manifestement dans l'égalité « $\left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^{\pi i}$ ». Par définition,

$$\left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^{\log(e^{2\pi i})/2} = e^{i \operatorname{Arg}(e^{2\pi i})/2}. \tag{1}$$

La fonction $\operatorname{Arg}(z)$ prend ses valeurs dans $]-\pi, \pi]$ (la détermination principale), et donc

$$\operatorname{Arg}(e^{2\pi i}) = 0,$$

d'où
$$\left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^0 = 1.$$
Par contre, si on fait la faute
$$\text{« } \operatorname{Arg}(e^{2\pi i}) = 2\pi \text{ »},$$
alors (1) nous donne la fausse égalité
$$\text{« } \left(e^{2\pi i}\right)^{1/2} = e^{\pi i} \text{ »}.$$
Morale de l'histoire : La propriété suivante, vraie dans $\mathbb{R}$, est fausse dans $\mathbb{C}$:
$$\left(z^{\beta}\right)^{\gamma} \neq z^{\beta\gamma}, \quad z, \beta, \gamma \in \mathbb{C},\ z \neq 0,$$
à cause de la non-univocité de la fonction $\operatorname{Arg}(z)$.

Exercice 2.
Utilisant l'exercice 1.1, on a que
$$z^2 = e^{2\log z} = e^{\log(z)+\log(z)} = e^{\log(z)}e^{\log(z)} = z \cdot z,$$
d'où le résultat.

Exercice 3.

1. Evident, en utilisant les propriétés de l'exponentielle complexe.
2. Utilisant l'exercice 1.2, on a
$$z^{\gamma}w^{\gamma} = e^{\gamma\log z}e^{\gamma\log w} = e^{\gamma(\log z+\log w)} = \begin{cases} e^{\gamma\log(zw)} & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]-\pi, \pi\right] \\ e^{\gamma(\log(zw)+2\pi i)} & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]\pi, 2\pi\right] \\ e^{\gamma(\log(zw)-2\pi i)} & \text{si } \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \in \left]-2\pi, -\pi\right]. \end{cases}$$
Comme $e^{\gamma\log(zw)} = (zw)^{\gamma}$, on a le resultat.
3. La fonction $z^{\gamma} = e^{\gamma\log(z)}$ est holomorphe dans O, car composition des fonctions e^w et $\gamma\log(z)$, holomorphes dans O (pour l'exponentielle, voir série 7 exercice 3.2 et pour le logarithme, voir le cours). On a donc
$$f'(z) = (e^{\gamma\log z})' = e^{\gamma\log z}\gamma\frac{1}{z} = \gamma z^{\gamma-1}.$$

Exercice 5.
Posons $u(x,y) := \sqrt{|xy|}$ et $v \equiv 0$, de sorte que

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

1. Nous avons trivialement $v_x(0,0) = v_y(0,0) = 0$. Montrons que $u_x(0,0) = u_y(0,0) = 0$. Par définition, nous avons directement

$$u_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

   de même pour u_y. Les équations de Cauchy-Riemann sont donc satisfaite avec

$$u_x(0,0) = v_y(0,0) = 0, \quad u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0.$$

2. Soit $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$. Nous voulons montrer que la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{h}$$

   n'est pas définie. D'une part, en choisissant $h_2 = 0$, la limite converge vers 0. D'autre part, si $h_1 = h_2 > 0$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{h_1 + ih_2} = \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1}{h_1(1+i)} = \frac{1}{1+i} \neq 0.$$

   Donc f n'est pas holomorphe en 0.
3. Supposons par l'absurde que u soit différentiable en $(0,0)$. Par définition, ceci implique, pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{u(h_1,h_2) - u(0,0) - h_1 u_x(0,0) - h_2 u_y(0,0)}{|h|} = \lim_{|h|\to 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

   En particulier, si $h_1 = h_2 > 0$, nous avons

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{h_1}{\sqrt{2}h_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

   ce qui est absurde, et donc u n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 7.
Le théorème de Cauchy pour les simplement connexes donne immédiatement l'indépendance par rapport à la courbe γ_z .

Par la preuve du Théorème qui donne l'existence d'une primitive aux fonctions holomorphes définies sur un simplement connexe que F est holomorphe dans Ω et que

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

On observe alors que

$$\frac{d}{dz}\left[f\left(z\right)e^{-F(z)}\right]=0$$

et on infère du Corollaire 9.4, que

$$f\left(z\right)e^{-F(z)}=f\left(z_0\right)e^{-F(z_0)}=f\left(z_0\right)e^{-\log f(z_0)}=1$$

d'où le résultat $e^{F(z)}=f\left(z\right)$. Par ailleurs comme $e^{F(z)}=f\left(z\right)$, on a que $e^{\mathrm{Re}\,F(z)}=\left|f\left(z\right)\right|$ et par conséquent, pour tout $z\in\Omega$,

$$\mathrm{Re}\left[F\left(z\right)\right]=\log\left|f\left(z\right)\right|.$$