EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 7	30 octobre 2017

Exercice 3.

1. On utilise le critère de d'Alembert : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1} n!}{|z|^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0,$$

ce qui montre que la série converge dans tout $\mathbb{C}$ et donc le rayon de convergence est infini.

2. Par un théorème du cours, on sait qu'une série de puissance est holomorphe sur son rayon de convergence et que sa dérivée s'obtient en dérivant termes à termes. Par le point précédent, e^z est holomorphe dans $\mathbb{C}$, d'où

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z.$$

3. Soit $z = x + iy$. Par définition,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(y) + i \sin(y), \end{aligned}$$

et donc

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

4. Les deux propriétés découlent immédiatement du point précédent.

Exercice 7.

1. Comme f est holomorphe en z_0, nous avons, par définition,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = 0.$$

En particulier,

$$\lim_{h\to 0} \left[f(z_0+h) - f(z_0) - hf'(z_0) \right] = 0,$$

ce qui implique

$$\lim_{h\to 0}\left[f(z_0+h)-f(z_0)\right]=0$$

d'où la continuité en z_0.

2. Addition :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(z_0+h)-(f+g)(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(z_0+h)-g(z_0)}{h}\\ &= f'(z_0)+g'(z_0).\end{aligned}$$

Produit :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(z_0+h)-(fg)(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(z_0+h)-f(z_0+h)g(z_0)+f(z_0+h)g(z_0)-(fg)(z_0)}{h}\\ &= f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).\end{aligned}$$

Quotient : par la formule pour le produit, il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0)=-\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)},$$

pour obtenir la formule pour le quotient. On a

$$\lim_{h\to 0}\frac{1/g(z_0+h)-1/g(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(z_0)-g(z_0+h)}{hg(z_0+h)g(z_0)}=\frac{-g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

3. Puisque f est holomorphe en z_0 et g en $f(z_0)$, on peut écrire

$$f(z_0+h_1)-f(z_0)=h_1\left(f'(z_0)+\epsilon_1(h_1)\right),\quad \forall\ h_1\in\mathbb{C} \tag{1}$$

$$g(f(z_0)+h_2)-g(f(z_0))=h_2\left(g'(f(z_0))+\epsilon_2(h_2)\right),\quad \forall\ h_2\in\mathbb{C} \tag{2}$$

avec $\lim_{h\to 0}\epsilon_i(h)=0$.

Dans (2), en remplaçant le premier h_2 par $(f(z_0+h_1)-f(z_0))$ et les deux autres par

$h_1\left(f'(z_0)+\epsilon_1(h_1)\right)$ (par (1) ces termes sont égaux), nous avons

$$\begin{aligned}g(f(z_0+h_1))-g(f(z_0)) &= h_1\left(f'(z_0)+\epsilon_1(h_1)\right)\left(g'(f(z_0))+\epsilon_2(h_1\left(f'(z_0)+\epsilon_1(h_1)\right))\right)\\ &= h_1\left(f'(z_0)g'(f(z_0))+\epsilon_3(h_1)\right),\end{aligned}$$

avec $\lim_{h\to 0}\epsilon_3(h)=0$, ce qui montre que $g\circ f$ est holomorphe en z_0 et que

$$(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0).$$