EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 6	23 octobre 2017

Exercice 3.
Il suffit, comme dans la série 4, d'appliquer le théorème de la divergence à $u\nabla v$ et $v\nabla u$ pour obtenir le résultat.

Exercice 4.

1. Soit $w \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de (1). Par la première identité de Green, nous avons
$$\int_\Omega |\nabla w|^2 = 0,$$
ce qui implique que $\nabla w = 0$ et donc w est constante. Ainsi, toutes les solutions de (1) sont des constantes.

2. Soient $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ deux solutions de (2). Alors $w := u - v$ est une solution de (1), et donc, par le point précédent, w est une constante. Conclusion, le problème (2) admet une unique solution, à une constante près.

3. Comme
$$\int_\Omega \Delta u(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds,$$
on a la condition nécéssaire
$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\partial\Omega} \varphi(x)ds.$$

Exercice 5.
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz aux vecteurs $a := (a_1, \ldots, a_k)$ et $1_k := (1, \ldots, 1)$, nous avons

$$a_1 + \cdots + a_k = \langle a; 1_k \rangle \leq |a||1_k| = \sqrt{k}\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_k^2},$$

d'où le résultat.

Exercice 6.

1. Voici deux preuves élémentaires.

— Soit la fonction définie pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &:= \int_\Omega (|f(x)| + \lambda |g(x)|)^2 \, dx \\ &= \int_\Omega f(x)^2 dx + 2\lambda \int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx + \lambda^2 \int_\Omega g(x)^2 dx \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

L'equation $I(\lambda) = 0$ est polynomiale du 2e degré et admet au plus une solution, car sinon on aurait $I(\lambda) < 0$ sur un certain intervalle. Par conséquent son discriminant est négatif :

$$4 \left(\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \right)^2 - 4 \left(\int_\Omega f(x)^2 dx \right) \left(\int_\Omega g(x)^2 dx \right) \leq 0,$$

ce qui implique

$$\left| \int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \right| \leq \left| \int_\Omega f(x)^2 dx \right| \left| \int_\Omega g(x)^2 dx \right|.$$

Vu que l'intérieur des intégrales est toujours positif, alors les intégrales elles-mêmes sont positives, et donc

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_\Omega f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

— Supposons que $\int_\Omega g^2, \int_\Omega f^2 > 0$ (autrement, le résultat est trivial). L'exercice précédent nous donne, pour $k = 2$, l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$$

si $a, b \geq 0$. En remplacant a par $\frac{|f(x)|}{(\int_\Omega f^2)^{\frac{1}{2}}}$, b par $\frac{|g(x)|}{(\int_\Omega g^2)^{\frac{1}{2}}}$, on aura

$$\frac{|f(x)g(x)|}{(\int_\Omega f^2)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega g^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} \frac{|f(x)|^2}{\int_\Omega f^2} + \frac{1}{2} \frac{|g(x)|^2}{\int_\Omega g^2}, \quad \forall x \in \Omega.$$

En intégrant l'inégalité, on obtient le résultat.

2. Utilisant la première identité de Green avec $v = u$ et le fait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ il vient

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = -\int_\Omega u(x) \Delta u(x) dx \leq \int_\Omega |u(x)||\Delta u(x)| dx.$$

L'inégalité obtenue au point 1 implique que

$$\int_\Omega |u(x)||\Delta u(x)| dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\Delta u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Appliquant l'exercice 5, nous avons, pour tout $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|\Delta u(x)|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_i} \right)^2 \leq 3 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_i} \right)^2 \leq 3 \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \\
&= 3 \, |\nabla^2 u(x)|^2.
\end{aligned}$$

Pour finir, combinant tout ce qui précède, on a le résultat, à savoir,

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \leq \sqrt{3} \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla^2 u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$