EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 5	16 octobre 2017

Exercice 5.
On note $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3),\ F = F(y) = (F^1(y), F^2(y), F^3(y)), y = (y_1, y_2, y_3)$, on aura pour la première composante de $\mathrm{rot}\Phi$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\Phi)^1(x) &= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\Big[F^1(tx)x_2 - F^2(tx)x_1\Big] - \frac{\partial}{\partial x_3}\Big[(F^3(tx)x_1 - F^1(tx)x_3)\Big]\right] t\,dt \\ &= \int_0^1 \Big[tF^1_{y_2}(tx)x_2 + F^1(tx) - tF^2_{y_2}(tx)x_1 - tF^3_{y_3}(tx)x_1 + tF^1_{y_3}(tx)x_3 + F^1(tx)\Big] t\,dt \\ &= \int_0^1 \Big[2tF^1(tx) - t^2(F^2_{y_2}(tx) + F^3_{y_3}(tx))x_1 + t^2(F^1_{y_2}(tx)x_2 + F^1_{y_3}(tx)x_3)\Big]\,dt,\end{aligned}$$

où on a permuté dérivée et intégrale grâce au fait que F est C^1 (voir §12.2 Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre, p. 129 dans le polycopié du prof. J. Rappaz).

L'hypothèse $\mathrm{div}\, F = 0$ implique que

$$F^1_{y_1}(tx) = -(F^2_{y_2}(tx) + F^3_{y_3}(tx)),$$

et donc

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\Phi)^1(x) &= \int_0^1 \Big[2tF^1(tx) + t^2(F^1_{y_1}(tx)x_1 + F^1_{y_2}(tx)x_2 + F^1_{y_3}(tx)x_3)\Big]\,dt \\ &= \int_0^1 \Big[2tF^1(tx) + t^2 \Big\langle \nabla F^1(tx); x\Big\rangle\Big]\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^2F^1(tx))dt \\ &= F^1(x).\end{aligned}$$

On montre de manière similaire que $(\mathrm{rot}\Phi)^2(x) = F^2(x)$ et $(\mathrm{rot}\Phi)^3(x) = F^3(x)$.

Exercice 6.

1. Notons $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$. Utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on a

$$\sigma_{x_1}(x_1, x_2) = \varphi^1_{x_1}(x_1, x_2)\tau_{y_1}(\varphi(x_1, x_2)) + \varphi^2_{x_1}(x_1, x_2)\tau_{y_2}(\varphi(x_1, x_2))$$

et

$$\sigma_{x_2}(x_1,x_2) = \varphi^1_{x_2}(x_1,x_2)\tau_{y_1}(\varphi(x_1,x_2)) + \varphi^2_{x_2}(x_1,x_2)\tau_{y_2}(\varphi(x_1,x_2)).$$

Par les propriétés élémentaires du produit vectoriel, nous calculons, en omettant d'écrire les variables des applications

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_1} \wedge \sigma_{x_2} &= \left(\varphi^1_{x_1}\tau_{y_1} + \varphi^2_{x_1}\tau_{y_2}\right) \wedge \left(\varphi^1_{x_2}\tau_{y_1} + \varphi^2_{x_2}\tau_{y_2}\right) \\
&= \varphi^1_{x_1}\varphi^1_{x_2}\left(\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_1}\right) + \varphi^1_{x_1}\varphi^2_{x_2}\left(\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}\right) \\
&\quad + \varphi^2_{x_1}\varphi^1_{x_2}\left(\tau_{y_2} \wedge \tau_{y_1}\right) + \varphi^2_{x_1}\varphi^2_{x_2}\left(\tau_{y_2} \wedge \tau_{y_2}\right) \\
&= \left(\varphi^1_{x_1}\varphi^2_{x_2} - \varphi^1_{x_2}\varphi^2_{x_1}\right)\left(\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}\right) \\
&= \det(\nabla\varphi)\left(\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}\right) \\
&= \mathrm{Jac}\,(\varphi)\left(\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}\right).
\end{aligned}$$

2. Par la définition de l'intégrale de surface, la formule de changement de variable et le point (1), nous avons directement

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\tau} f ds &= \iint\limits_{\overline{B}=\varphi(\overline{A})} f(\tau)|\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}|\, dy_1 dy_2 \\
&= \iint\limits_{\overline{A}} f(\tau\circ\varphi)|(\tau_{y_1}\circ\varphi) \wedge (\tau_{y_2}\circ\varphi)||\mathrm{Jac}\,(\varphi)\,|\, dx_1 dx_2 \\
&= \iint\limits_{\overline{A}} f(\sigma)|\sigma_{y_1} \wedge \sigma_{y_2}|\, dy_1 dy_2 \\
&= \iint\limits_{\sigma} f ds.
\end{aligned}$$

De manière analogue

$$\iint\limits_{\tau} F \cdot ds = \iint\limits_{\sigma} F \cdot ds.$$

Exercice 7.

Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to \Gamma$ une paramétrisation simple et régulière de la courbe Γ. Définissons $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ par

$$\sigma(t,h) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t), hf(\gamma_1(t), \gamma_2(t))).$$

Alors, σ est une paramétrisation de Σ, avec

$$\sigma_t \wedge \sigma_h = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t)f(\gamma(t)) \\ -\gamma_1' f(\gamma(t)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$|\sigma_t \wedge \sigma_h| = f(\gamma(t))|\gamma'(t)| > 0.$$

Ainsi,

$$\iint_{\Sigma} 1\, ds = \int_0^1 \int_0^1 |\sigma_t \wedge \sigma_h|\, dt\, dh = \int_0^1 f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt = \int_{\Gamma} f\, dl.$$